Подмножества $\mathbb{R}^n$ и непрерывные отображения

▷ Напомним, что канторово множество — это множество чисел на отрезке $[0;1]$, у которых есть троичная запись из нулей и двоек. Его можно получить, начиная с единичного отрезка и на каждом шаге выкидывая среднюю треть каждого из имеющихся отрезков (этот процесс нарисован внизу страницы) — канторово множество состоит из точек, не выкинутых ни на каком шаге.

Задача 1.1. а) Укажите точку канторова множества (отличную от 0 и 1), не являющуюся концом ни одного из выкинутых интервалов.

б) Докажите, что канторово множество компактно.

Задача 1.2. а) Существует непрерывная биекция из полуинтервала на окружность... б) ...но они не гомеоморфны.

Задача 1.3. а) Отрезок и интервал; б) отрезок и окружность; в) прямая и плоскость не гомеоморфны.

Задача 1.4. Отображения $f, g\colon [0;1] \to [0;1]$ непрерывны тогда и только тогда, когда непрерывно отображение $F\colon [0;1] \to [0;1]^2$, $t \mapsto (f(t), g(t))$.

Задача 1.5. а) Приведите пример такого отображения $F\colon [0;1]^2 \to [0;1]$, что функции $f_{y_0}(x) := F(x, y_0)$ и $g_{x_0}(y) := F(x_0, y)$ непрерывны для всех $x_0, y_0 \in [0;1]$, но само отображение F непрерывным не является.

б) Сформулируйте какие-нибудь разумные условия на функции f и g, гарантирующие непрерывность функции F.

Задача 1.6. Гомеоморфна ли плоскость открытому диску? замкнутому диску?

Задача 1.7. Сфера с выколотой точкой гомеоморфна плоскости.

Задача 1.8. Плоскость с выколотой точкой гомеоморфна цилиндру ($\mathbb{R} \times S^1$).

Задача 1.9. а) Канторово множество гомеоморфно своему квадрату.

б) Постройте непрерывную сюръекцию канторова множества на отрезок.

Задача 1.10. а) Постройте, пользуясь предыдущей задачей, непрерывную сюръекцию отрезка на квадрат.

б) Существует ли непрерывная сюръекция отрезка на плоскость?

в) Существует ли непрерывная сюръекция интервала на плоскость?