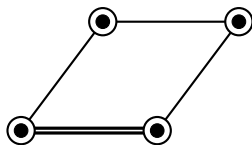


Примеры топологических пространств

Задача 2.1. Гомеоморфны ли \mathbb{R}^2 с метрикой $d((x, y), (x', y')) = \max |x - x', y - y'|$ и \mathbb{R}^2 со стандартной метрикой?

Задача 2.2. Введите «естественную» топологию на всевозможных положениях единичного квадрата с центром в начале координат. Гомеоморфно ли это пространство окружности?

Задача 2.3. Найдите конфигурационное пространство «шарнирного квадрата» (замкнутой шарнирной плоской 4-звенной ломаной, все ребра которой имеют длину 1; положение одного из звеньев зафиксировано).



Задача 2.4. Введите топологию на следующих пространствах и докажите, что все они гомеоморфны («вещественное проективное пространство»):

- i) прямые в \mathbb{R}^{n+1} , проходящие через начало координат;
- ii) сфера S^n с отождествленными противоположными точками;
- iii) диск D^n с отождествленными противоположными точками на границе.

Задача 2.5. Введите топологию на следующих пространствах и докажите, что все они гомеоморфны («комплексное проективное пространство»):

- i) комплексные прямые в \mathbb{C}^{n+1} , проходящие через начало координат;
- ii) фактор сферы $S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$ по действию окружности $S^1 = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$, $(z_0, \dots, z_n) \mapsto (tz_0, \dots, tz_n)$.

Задача 2.6. а) Введите топологию на грассманиане $Gr_{k,n}(\mathbb{R})$, точки которого суть k -мерные линейные подпространства в \mathbb{R}^n .

б*) Постройте непрерывное отображение $S^2 \times S^2 \rightarrow Gr_{2,4}(\mathbb{R})$, при котором у каждой точки ровно два прообраза.

Задача 2.7. а) Пространство всевозможных прямых на плоскости гомеоморфно листу Мёбиуса.

б) Группа $SO(3)$ (конфигурационное пространство твердого тела с одной закрепленной точкой в пространстве) гомеоморфно вещественному проективному пространству $\mathbb{R}P^3$.

Задача 2.8. Симметрический квадрат пространства X — это фактор X^2 по отождествлению $(x, x') \sim (x', x)$ для всех пар точек. Докажите, что а) симметрический квадрат S^1 гомеоморфен листу Мёбиуса; б*) симметрический квадрат S^2 гомеоморфен $\mathbb{C}P^2$.