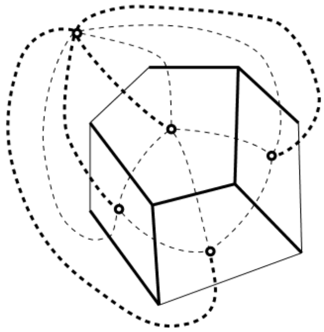
Графы и немного топологичесих конструкций

Задача 3.1. а) Пусть T — остовное дерево в (связном) планарном графе. Докажите, что подграф T^* двойственного графа, состоящий из всех ребер, не пересекающих T, — тоже дерево.

б) Пользуясь тем, что для дерева $V = E + 1$, и предыдущей задачей, докажите формулу Эйлера: для (связного) планарного графа $V - E + F = 2$.



Остовное дерево T и двойственное дерево T^*.

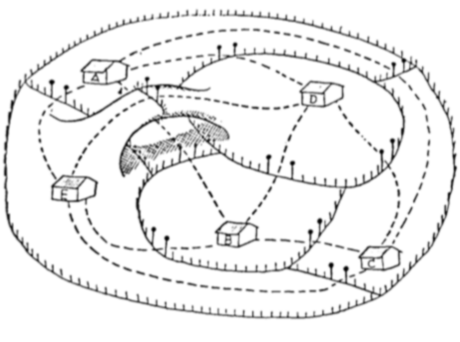
Задача 3.2. Пользуясь формулой Эйлера докажите, что K_5 (полный граф на 5 вершинах) и $K_{3,3}$ (полный двудольный граф с 3 черными и 3 белыми вершинами) не планарны.

▷ *Теорема Понтрягина–Куратовского* говорит, что если у графа нет подграфов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$, то он планарен.

Задача 3.3. а) Любую карту на сфере можно раскрасить в 6 цветов.

б) Любую ли карту на торе можно раскрасить в 6 цветов?

Задача 3.4. В тор можно вложить граф а) $K_{3,3}$; б) K_6; в) K_7; г) $K_{4,4}$ (приветствуются изящные конструкции с красивыми картинками).



Граф K_5 на торе.

Задача 3.5. а) $\Sigma X \cong X * S^0$;   б) $S^n * S^m \cong S^{m+n+1}$.

Задача 3.6. а) $S^3 \setminus S^1 \cong S^1 \times \operatorname{Int} D^2$;   б) $S^n \setminus S^m \cong S^{n-m-1} \times \operatorname{Int} D^{m+1}$.

Задача 3.7. Склеивая два полнотория $S^1 \times D^2$ по границе можно получить а) $S^1 \times S^2$; б) S^3; в*) $\mathbb{R}P^3$.