

Поверхности и их эйлерова характеристика

Задача 4.1. Что получится, если склеить две ленты Мёбиуса по границе?

Задача 4.2. Можно ли склеивая попарно стороны шестиугольника получить сферу? тор? проективную плоскость?

Задача 4.3. Как получить сферу с g ручками (пространство $(T^2)^{\#g}$), склеивая попарно стороны многоугольника?

▷ Любая компактная поверхность без края получается как $(T^2)^{\#n} \# (\mathbb{R}P^2)^{\#m}$ ($n, m \geq 0$), а единственное соотношение описано в следующей задаче.

Задача 4.4. Докажите (не пользуясь теоремой классификации поверхностей), что $T^2 \# \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$.

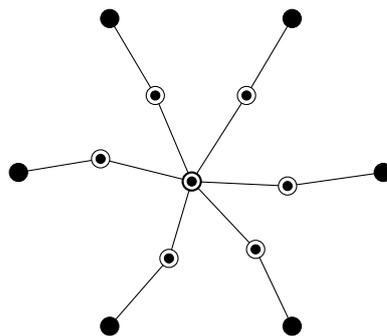
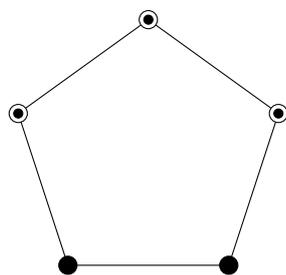
▷ Для любой триангуляции данного пространства выражение $V - E + F$ принимает одно и то же значение («Эйлерова характеристика пространства»).

Задача 4.5. Выразите $\chi(M \# N)$ через $\chi(M)$ и $\chi(N)$. Найдите эйлерову характеристику сферы с g ручками.

Задача 4.6. Сколькими способами можно получить сферу, склеивая попарно стороны $2n$ -угольника? (Способы, отличающиеся только поворотом, считаются различными.)

Задача 4.7. а) Найдите конфигурационное пространство пятиугольника с двумя закрепленными вершинами, все ребра которого имеют длину 1.

б*) Найдите конфигурационное пространство «паука», «лапы» которого закреплены в вершинах правильного n -угольника радиуса $2 - \varepsilon$, а все звенья имеют длину 1.



Задача 4.8*. Найдите род следующих комплексных кривых:

а) квадрики;

б) эллиптической кривой $y^2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$;

в) кривой Ферма $x^n + y^n = 1$.