

Степень отображения: кривые и векторные поля

Задача 6.1. Найдите индексы Уитни (степень отображения Гаусса) следующих кривых:



Задача 6.2. Любая погруженная кривая на сфере регулярно гомотопна окружности или восьмерке.

- ▷ Как доказал Смейл, классы регулярной гомотопии регулярных кривых на произвольной поверхности совпадают с классами гомотопии отображений окружности в пространство скоростей (единичных касательных векторов).

Задача 6.3. Существует ли регулярная гомотопия окружности на плоскости, переводящая окружность в себя, но меняющая местами ее внешнюю и внутреннюю стороны?

Задача 6.4. Постройте регулярную гомотопию тора с дыркой, меняющую местами его внешнюю и внутреннюю стороны.

- ▷ Смейл доказал, что, как ни удивительно, замкнутую поверхность *можно* вывернуть наизнанку регулярной гомотопией (одну из явных конструкций выворачивания сферы можно увидеть в мультфильме Outside In).

* * *

Задача 6.5. Нарисуйте эскиз векторного поля $z \mapsto z^n/|z|^{n-1}$ на плоскости и найдите индекс особой точки этого поля (n — произвольное целое число).

Задача 6.6. Докажите, что векторное поле без особых точек, заданное на границе кольца, может быть продолжено до поля на всем кольце без особых точек тогда и только тогда, когда индексы вдоль обеих граничных окружностей равны.

Задача 6.7. Существует ли векторное поле ровно с одной особой точкой а) на сфере; б) на сфере с двумя ручками. Если да, то чему равен индекс этой особой точки?

Задача 6.8. Кастельное векторное поле задано на границе некоторой поверхности. Когда оно продолжается до поля на всей поверхности?