

## Накрытия

**Задача 8.1.** а) Накройте пространство  $\bigcirc\bigcirc$  пространством  $\bigcirc\bigcirc\bigcirc$ .

б) Накройте сферу с двумя ручками сферой с тремя ручками.

**Задача 8.2.** Может ли тор трехлистно накрывать тор?

**Задача 8.3.** Если  $\tilde{X}$  покрывает  $k$ -листно пространство<sup>1</sup>  $X$ , то  $\chi(\tilde{X}) = k \cdot \chi(X)$ .

**Задача 8.4.** Когда сферой с  $G$  ручками можно накрыть сферу с  $g$  ручками?

**Задача 8.5.** а) При каких  $n$  существует свободное действие группы  $\mathbb{Z}/n$  на  $S^2$ ?

б) Докажите, что любое отображение  $\mathbb{R}P^2$  в себя имеет неподвижную точку.

▷ Пусть разумное<sup>2</sup> пространство  $X$  линейно связно. Его единственным образом можно накрыть связным односвязным пространством  $\tilde{X}$  (“универсальное накрытие”).

Группа автоморфизмов универсального накрытия есть  $\pi_1(X)$ ; действие  $\pi_1(X)$  на любом слое универсального накрытия свободно и транзитивно.

**Задача 8.6.** Постройте универсальное накрытие

а) плоскости с выколотой точкой; б) ленты Мёбиуса; в) сферы с двумя ручками.

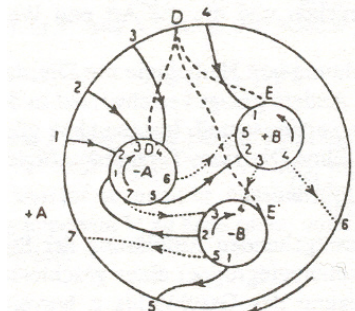
**Задача 8.7.** Постройте универсальное накрытие пространства

а)  $S^1 \vee S^1$ ; б) объединение сферы  $S^2$  с диаметром; в)  $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$ .

**Задача 8.8\*.** Докажите, что универсальное накрытие  $Gr_{2,4}(\mathbb{R})$  есть  $S^2 \times S^2$ , и найдите  $\pi_1(Gr_{2,4}(\mathbb{R}))$ .

**Задача 8.9\*.** Постройте универсальное накрытие пространства  $M$  всех додекаэдров, вписанных в фиксированную двумерную сферу и найдите  $\pi_1(M)$ .

**Задача 8.10.** Докажите, что если  $S$  — связное односвязное пространство, то любое отображение  $S \rightarrow X$  поднимается до отображения  $S \rightarrow \tilde{X}$ . Существенно ли требование односвязности пространства  $S$ ?



Другая конструкция многообразия из задачи 8.9  
(диаграмма из статьи Пуанкаре)

<sup>1</sup>Оба пространства можно считать конечными клеточными комплексами.

<sup>2</sup>Например, локально линейно связное и локально односвязное (у нас будут только такие).