Накрытия и фундаментальная группа

▷ Накрытие линейно связных пространств $\widetilde{X} \to X$ индуцирует *вложение* групп $\pi_1(\widetilde{X}) \hookrightarrow \pi_1(X)$. Это задает взаимно однозначное соотвествие между подгруппами $\pi_1(X)$ и накрытиями пространства X[1].
Слой накрытия, соответствующего группе H, есть $\pi_1(X)/H$, а тотальное пространство можно отождествить с $\bar{X}/H$, где $\bar{X}$ — универсальное накрытие.

Задача 9.1. Укажите накрытие тора, соответствующее подгруппе $\mathbb{Z} \times 0 \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \pi_1(S^1 \times S^1)$.

Задача 9.2. а) Какая подгруппа в $\pi_1(S_1 \vee S^1)$ соответствует накрытию из задачи 8.1а?
б) Укажите накрытие букета двух окружностей, соответствующее подгруппе $\langle a \rangle \subset \langle a, b \rangle = \pi_1(S^1 \vee S^1)$.
в) То же для подгруппы $\langle a^2, b^2, ab \rangle$.

Задача 9.3. Опишите накрытие пространства $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$, соответствующее подгруппе $\langle (ab)^n \rangle \subset \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 = \pi_1(\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2)$.

Задача 9.4. Пусть $\pi\colon \bar{X} \to X$ — универсальное накрытие, $A \subset X$, $\widetilde{A}$ — компонента линейной связности пространства $\pi^{-1}(A)$. Какой подгруппе в $\pi_1(A)$ соответствует накрытие $\widetilde{A} \to A$?

Задача 9.5. Может ли у одной петли в базе некоторого накрытия одно поднятие быть путем, конец которого не совпадает с началом, а другое — петлей?

Задача 9.6. Используя фундаментальную группу а) вложите в свободную группу с двумя образующими свободную группу со счетным числом образующих; б) докажите, что подгруппа свободной группы свободна.

Задача 9.7. а) Докажите, что у неориентируемого многообразия есть нетривиальное двулистное накрытие с ориентируемым тотальным пространством.
б) Предъявите такое накрытие для бутылки Клейна.

Задача 9.8. Пусть $\widetilde{X} \to X$ накрытие, соответствующее группе $H \subset \pi_1(X)$. Докажите, что отображение $f\colon S \to X$ поднимается до отображения $S \to \widetilde{X}$ тогда и только тогда, когда $f_*(\pi_1(S)) \subset H$.

[1] Ср. это соответствие между *накрытиями пространств* и *подгруппами автоморфизмов накрытия* с соответствием Галуа между *расширениями полей* и *подгруппами автоморфизмов расширения.*