

ЭКЗАМЕН 22 МАЯ 2021

Задача 1. Найти

$$\int_{|z|=10} \frac{dz}{z^5 + z + 1}.$$

Окружность  $|z| = 10$  проходится в положительную сторону.

Задача 2. Голоморфная функция  $f$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 1$  удовлетворяет для всех  $z$  из этой полуплоскости соотношению  $(\operatorname{Re} f(z))^3 - (\operatorname{Im} f(z))^3 = 8$ . Можно ли найти такую функцию  $f$ , что  $f'(2) = 3/2$ ?

Задача 3. а) Найти число корней многочлена (посчитанных с учетом кратностей)  $4z^6 - 10z^3 - 3$  вне круга  $|z| < 1$ .

б) Найти число корней многочлена (посчитанных с учетом кратностей)  $2z^6 - z^4 + 5z - 1$  в кольце  $1 < |z| < 2$ .

Задача 4. Найти все рациональные функции, модуль которых равен единице в каждой точке окружности  $|z| = 1$ .

Задача 5. а) Докажите теорему Лиувилля (ограниченная в  $\mathbb{C}$  голоморфная функция постоянна) с помощью дифференциальной формы  $\frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$ ;

б) Верно ли, что угол, под которым виден отрезок на плоскости, – гармоническая функция вне прямой, содержащей этот отрезок?

Задача 6. Функция  $f$  голоморфна в открытом круге. Может ли она стремиться к бесконечности при подходе к любой точке граничной окружности?

Задача 7. Рассмотрим многочлен  $h(z) = \prod(z - z_i)$ ,  $z_1, \dots, z_n$  – различные точки в  $\mathbb{C}$ . Докажите, что

$$\sum \frac{P(z_i)}{h'(z_i)} = 0,$$

для любого многочлена  $P$ , такого что  $\deg P < \deg h - 1$ .

Задача 8. Голоморфная в  $\mathbb{C}$  функция  $f$  удовлетворяет неравенству  $f(z) \leq Ce^{|z|}$  для некоторой константы  $C > 0$  и всех  $z$ . Может ли последовательность  $f^{(n)}(0)/\sqrt{n}$  быть неограниченной?

Задача 9. Пусть голоморфная в открытом диске функция  $f$  имеет в нем два нуля. Верно ли, что производная  $f'$  имеет ноль в этом диске?

Задача 10. Пусть  $x_1 < x_2 < x_3$  действительные числа. Рассмотрим многочлен  $P_3(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ .

а) Является ли замыкание в  $\mathbb{C}P^2$  кривой, заданной в стандартной карте  $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}P^2$  уравнением  $y^2 = P_3(x)$ , гладким подмногообразием?

б) Верно ли, что

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{P_3(x)}} = \int_{x_3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{P_3(x)}}?$$