

НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Экзамен. 17.06.2021.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо прислать лектору по электронной почте не позднее вечера среды 23 июня. Большая просьба по возможности для перевода рукописных работ в файл использовать сканер, а не фотографировать на телефон, присылать один файл в формате pdf, а не кучу файлов в формате jpg, и писать ручкой, а не карандашом.

Большая просьба решать самостоятельно.

Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно». Для того, чтобы экзамен был засчитан в НМУ, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее трёх задач, но возможны ослабления этого критерия в зависимости от общей ситуации со сдачей задач.

Задача 1. Поверхность называется *линейчатой*, если она параметрически задается в виде $\vec{r}(u, v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u)$. Докажите, что на линейчатой поверхности гауссова кривизна всюду неположительна (5 баллов).

Задача 2. Из аналитической геометрии вы знаете примеры поверхностей, на которых есть два различных семейства прямолинейных образующих. Докажите, что если на гладкой двумерной поверхности в трехмерном пространстве есть три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является куском плоскости (10 баллов).

Задача 3. Пусть $[z_0 : \dots : z_n]$ однородные координаты в $\mathbb{R}P^n$. Напомним, что отображение Веронезе степени d — это отображение $\nu_d : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^N$, заданное формулой

$$\nu_d([z_0 : \dots : z_n]) = [\dots : z^I : \dots], \quad (1)$$

где z^I это некоторый моном степени d от z_0, \dots, z_n , а в правой части (1) стоят все мономы степени d . Например, при $n = 2$ и $d = 2$ получаем отображение $\mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^5$, заданное формулой

$$\nu_2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 : z_1^2 : z_2^2 : z_0z_1 : z_0z_2 : z_1z_2].$$

Найдите обратный образ $\nu_d^* \gamma^1$ универсального расслоения при этом отображении. (10 баллов).

Задача 4. Подмногообразие M риманова многообразия N с индуцированной метрикой называется вполне геодезическим, если все геодезические M являются в то же время и геодезическими N . Доказать, что M вполне геодезическое тогда и только тогда, когда вторая квадратичная форма нулевая. (5 баллов).

Задача 5. Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ такая гладкая функция, что $|\text{grad } f| = 1$ на всём M . Доказать, что интегральные кривые векторного поля $\text{grad } f$ являются геодезическими (5 баллов).

Задача 6. Докажите, что на многообразии отрицательной секционной кривизны геодезические не содержат сопряжённых точек (10 баллов).

Задача 7. Найдите явно якобиевы поля вдоль геодезических на сфере \mathbb{S}^n в подходящем базисе векторных полей. (10 баллов).

Задача 8. Найдите $\text{ch}(\xi_k)$, где ξ_k тривиальное расслоение ранга k (5 баллов).

Задача 9. Докажите, что если многообразие M является границей некоторого многообразия W , то все числа Понтрягина M , то есть числа Потрягина касательного расслоения TM , равны нулю. (10 баллов).

Указание. Вспомните о функториальности классов Понтрягина и используйте теорему Стокса.

Задача 10*. Найти число Понтрягина

$$\langle p_1(r\gamma_{\mathbb{H}}^1), [\mathbb{S}^4] \rangle = \oint_{\mathbb{S}^4} p_1(r\gamma_{\mathbb{H}}^1),$$

где $\gamma_{\mathbb{H}}^1 = (E \rightarrow \mathbb{H}P^1 \simeq S^4)$ — универсальное расслоение над кватернионной проективной прямой, а r операция оветствления (не забывайте о некоммутативности кватернионов!) (25 баллов).