НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 1.
Производная Ли, дифференциал, контракция и тождества с ними. Риманова метрика, форма объёма. 11.02.2021.

Задача 1. Пусть Ω дифференциальная p-форма, а ω — дифференциальная 1-форма, не равная нулю. Доказать, что Ω представима в виде $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

Задача 2. Найти а) $d\omega$, если $\omega = x^2 dx \wedge dy + xzdy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$,

б) $d\omega$ и $f^*\omega$, если $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ а $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ задано формулой $(x, y) = f(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$.

Задача 3. На лекции было доказано, что производная Ли 1-формы ω вдоль векторного поля Y может быть в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ найдена так: если $\omega = \omega_i\, dx^i$, $\quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, то $L_Y\omega = \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} Y^j + \omega_l \frac{\partial Y^l}{\partial x^i}\right) dx^i$. Вывести аналогичную формулу для производной Ли k-формы.

Задача 4. Найти интегральные кривые векторного поля $Z = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ на плоскости. Найти непосредственно по определению и при помощи явной формулы производную Ли формы $\omega = dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ вдоль Z.

Задача 5. Доказать тождества

$$[L_X, \iota_Y]\omega = \iota_{[X,Y]}\omega, \quad L_{fX}\omega = fL_X\omega + df \wedge \iota_X\omega, \quad L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$$

где f — гладкая функция.

Задача 6*. Пусть $\omega \in \Omega^p(M)$ и $Y, X_1, \ldots, X_p$ — векторные поля на M. Доказать тождество

$$(L_Y\omega)(X_1, \ldots, X_p) = L_Y(\omega(X_1, \ldots, X_p)) -$$
$$-\omega(L_Y X_1, \ldots, X_p) - \ldots - \omega(X_1, \ldots, L_Y X_p).$$

Задача 7. Пусть $\omega \in \Omega^p(M)$ и $X_0, \ldots, X_p$ — векторные поля на M. Доказать тождество

$$(d\omega)(X_0, \ldots, X_p) = \sum_{i=0}^{p} X_i(\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_p)) +$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_p).$$

Задача 8. Пусть даны 1-форма $\omega = x\,dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ и векторные поля $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. Найти $d\omega(X, Y)$ с помощью формулы вычисления внешнего дифференциала формы через коммутаторы векторных полей. Найти $(L_Y\omega)(X)$ с помощью формулы вычисления производной Ли дифференциальной формы через коммутаторы векторных полей.

Задача 9. Найти на сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ метрику, индуцированную стандартной метрикой на $\mathbb{R}^3$. Найдите с помощью найденной метрики на сфере угол между векторами $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ и $\frac{\partial}{\partial \psi}$, где φ, ψ — сферические координаты на сфере, в точке с координатами $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\psi = \frac{\pi}{4}$. Найти форму объема на двумерной сфере $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Задача 10. Обозначим через $\mathbb{R}^{1,2}$ пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами (t, x, y) и псевдоримановой метрикой $g = dt^2 - dx^2 - dy^2$. Введите аналог сферических координат на псевдосфере $t^2 - x^2 - y^2 = 1$ и вычислите ограничение на псевдосферу g в этих координатах. Убедитесь, что $\tilde{g} = -g$ является римановой метрикой. Рассмотрим стереографическую проекцию верхней чашки псевдосферы из точки $(0, 0, -1)$ на единичный диск в плоскости $t = 0$. Будем рассматривать координаты (x, y) на диске как координаты на псевдосфере. Вычислите риманову метрику на псевдосфере в этих координатах.

Отобразим верхнюю полуплоскость $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}(z) > 0\}$ на единичный круг с помощью отображения $\varphi(z) = i\frac{z-i}{z+i}$. Убедитесь, что φ — диффеоморфизм и вычислите метрику $\varphi^*(\tilde{g})$ на $\mathcal{H}$, где g — метрика из предыдущей задачи.