НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 12.
Характеристические классы. 17.06.2021.

Задача 1. Пусть η вещественное расслоение, $\mathbb{C} \otimes \eta$ его комплексификация. Докажите, что $c_{2k+1}(\mathbb{C} \otimes \eta) = 0$, $c_{2k}(\mathbb{C} \otimes \eta) = (-1)^k p_k(\eta)$.

Указание. Посмотрите на полный класс Чженя и воспользуйтесь образующими У.

Задача 2. Пусть ранг комплексного векторного расслоения ξ равен k. Выразите $c_1(\det \xi) = c_1(\Lambda^k \xi)$ через классы Чженя расслоения ξ.

Задача 3. Пусть ξ комплексное расслоение, $r\xi$ его овеществление.

- Выразите $p_k(r\xi)$ через классы Чженя расслоения ξ.
- Докажите, что $e(r\xi) = c_n(\xi)$.

Указание. Посмотрите на полный класс Понтрягина и воспользуйтесь образующими У.

Задача 4. Для ориентированной поверхности в евклидовом пространстве $M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ выразить классы Эйлера и Понтрягина через первую и вторую квадратичные формы.

Указание. Не забывайте про формулу Уитни для классов Понтрягина!

Задача 5. Пользуясь предыдущей задачей, перепишите формулу Гаусса-Бонне в терминах характеристических классов касательного расслоения поверхности.

Задача 6. Докажите, что если у ориентированного вещественного расслоения η есть не обращающееся в ноль сечение, то $e(\eta) = 0$. Комбинируя это с предыдущей задачей, докажите, что из всех компактных ориентированных поверхностей без края «причесать» можно только тор, то есть только на торе есть глобальное не обращающееся в ноль касательное векторное поле.

Задача 7. На лекции при построении класса Эйлера $e(\eta)$ ориентированного вещественного расслоения η мы использовали метрику на η и связность в η. Докажите, что $e(\eta)$ не зависит ни от выбора метрики, ни от выбора связности. Зависит ли класс Эйлера $e(\eta)$ от выбора ориентации расслоения η?

Задача 8. Пусть ξ комплексное расслоение. Как классы Чженя двойственного расслоения $c_i(\xi^*)$ выражаются через классы Чженя $c_i(\xi)$?

Пусть η вещественное расслоение. Как классы Понтрягина двойственного расслоения $p_i(\eta^*)$ выражаются через классы Понтрягина $p_i(\eta)$?

Задача 9. Найдите класс Чженя касательного расслоения $T\mathbb{C}P^1$ и число Чженя

$$\langle c_1(T\mathbb{C}P^1), [\mathbb{C}P^1] \rangle := \int\limits_{\mathbb{C}P^1} c_1(T\mathbb{C}P^1).$$

Указание. Класс Чженя касательного расслоения $T\mathbb{C}P^1$ можно легко найти с помощью формулы, связывающей расслоение $(\gamma^1)^*$, двойственное к тавтологическому, и $T\mathbb{C}P^1$.

Задача 10. Докажите, что если многообразие M является границей некоторого многообразия W, то все числа Понтрягина M, то есть числа Понтрягина касательного расслоения TM, равны нулю.

Указание. Вспомните о функториальности классов Понтрягина и используйте теорему Стокса.