НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 1.
Ориентация. Интегрирование 18.02.2021.

Задача 1. Доказать, что связное многообразие или неориентируемо, или допускает ровно две ориентации.

Задача 2. Рассмотрим атлас на многообразии. Назовём упорядоченное множество карт (U_i, φ_i), $i = 1, \dots, n$, дезориентирующей цепочкой карт, если для любого $i = 1, \dots, n-1$ пересечение $U_i \cap U_{i+1}$ непусто, якобиан замены координат на этом пересечении положителен, пересечение $U_n \cap U_1$ тоже непусто, но якобиан замены координат на этом пересечении отрицателен. Доказать, что если на многообразии есть дезориентирующая цепочка карт, то многообразие неориентируемо.

Задача 3. Построить на листе Мёбиуса атлас с дезориентирующей цепочкой карт. Вывести из этого, что лист Мёбиуса неориентируем.

Задача 4. Доказать, что выбор ориентации на двумерной поверхности в трёхмерном ориентированном евклидовом пространстве эквивалентен выбору гладкого поля единичных нормалей к поверхности.

Задача 5. Доказать, что на n-мерном многообразии M существует дифференциальная n-форма, не обращающаяся ни в какой точке в ноль, тогда и только тогда, когда M ориентируемо.

Задача 6. Доказать, что проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ неориентируема.

Задача 7. Найти площадь (двумерный объём) двумерной сферы $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ радиуса R.

Задача 8. Вычислить интеграл от формы $\Omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ по области $D = \{-1 < u < 1, -1 < v < 1\}$ на поверхности $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$. Напомним, что если $\iota : N \hookrightarrow M$ — подмногообразие, то под интегралом по N формы $\omega \in \Omega(M)$ подразумевается интеграл по N формы $\iota^* \omega$.

Задача 9. Вычислить непосредственно (без теоремы Стокса) интегралы

1) $\int_L \frac{ydx - xdy}{y^2}$, где L ориентированный отрезок от точки $(1, 2)$ до точки $(2, 1)$ в $\mathbb{R}^2$;

2) $\oint_L -x^2 y dx + xy^2 dy$, где L окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^2$, пробегаемая в положительном направлении.

Задача 10*. Докажите, что форма объема на единичной сфере $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ получается ограничением на неё формы

$$dV = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^{n+1} \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1}),$$

где $x^1, \dots, x^n$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^{n+1}$.