НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 3.
Интегрирование. Теорема Стокса. Операция Ходжа 25.02.2021.

Задача 1. Доказать, что на любом многообразии можно ввести риманову метрику.

Задача 2. Построить атлас на многообразии с краем — единичном замкнутом диске $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ в евклидовой плоскости.

Задача 3. Вычислить с помощью теоремы Стокса интегралы

1) $\int_L \frac{ydx - xdy}{y^2}$, где L ориентированный отрезок от точки $(1, 2)$ до точки $(2, 1)$ в $\mathbb{R}^2$;

2)$\oint_L -x^2ydx + xy^2dy$, где L окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^2$, пробегаемая в положительном направлении.

Задача 4. Найти дифференциал от формы $\omega = P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dy$. Записать в терминах ω и $d\omega$ классическую формулу Стокса

$$\oint_{\partial\Sigma} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dy =$$
$$= \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Задача 5. Пусть $\vec{\mathbf{F}} = (P, Q, R) = P\vec{\mathbf{i}} + Q\vec{\mathbf{j}} + R\vec{\mathbf{k}}$. Разберитесь, почему

$$\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_\gamma P\, dx + Qdy + Rdz.$$

Задача 6. Пусть $\vec{\mathbf{F}} = (P, Q, R) = P\vec{\mathbf{i}} + Q\vec{\mathbf{j}} + R\vec{\mathbf{k}}$, а $\vec{\mathbf{n}}$ — поле единичных нормалей к поверхности Σ. Разберитесь, почему

$$\iint_\Sigma \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS = \iint_\Sigma P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy.$$

Задача 7. Перепишите на языке дифференциальных форм классические формулы Стокса

$$\iint_\Sigma \operatorname{rot} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS = \oint_{\partial\Sigma} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}, \quad \iint_\Sigma (\nabla \times \vec{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS = \oint_{\partial\Sigma} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}},$$

и Гаусса-Остроградского

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{\mathbf{F}}\, dx\, dy\, dz = \oiint_{\partial V} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS, \quad \iiint_V \nabla \cdot \vec{\mathbf{F}}\, dx\, dy\, dz = \oiint_{\partial V} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS.$$

Разберитесь, как это связано с теоремой Стокса на многообразиях. Почему ориентация границы в классических формулировках точно такая, которая индуцируется на крае многообразия из ориентации многообразия?

Задача 8. Найти с помощью теоремы Стокса интеграл по сфере радиуса 1 от формы $\omega = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$.

Задача 9. Вычислите *явным вычислением* интеграл

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

где L окружность $x^2 + y^2 = R^2$ в $\mathbb{R}^2$, пробегаемая в положительном направлении. Заметим, что интегрируемая форма — это просто $d\varphi$, где φ — полярный угол. Почему полученный ненулевой результат не противоречит теореме Стокса?

Задача 10. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — произвольный базис в евклидовом ориентированном векторном пространстве V. Доказать, что $*1 = \frac{1}{\sqrt{\det g}} v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$. Докажите, что на ориентируемом компактном многообразии $dVol = *1$.