ЛЕКЦИЯ 1

Аннотация. Примеры топологических утверждений: лемма о блинах.

"Леммой о блинах" называют обычно такое утверждение: в пространстве $\mathbb{R}^n$ задано n подмножеств ("блинов"). Тогда существует гиперплоскость $L \subset \mathbb{R}^n$ (аффинная, т.е. не обязательно проходящая через начало координат), делящая объем каждого из блинов ровно пополам. Иными словами — можно одним движением "ножа" (размерности $n-1$) разделить пополам сразу все блины.

Мы докажем лемму о блинах при $n = 1$ и $n = 2$ и частично при $n = 3$.

Доказательство при $n = 1$. Точное содержание теоремы (и подробности доказательства) зависит от того, какие "блины" считаются допустимыми. По смыслу утверждения блины должны иметь положительный объем, так что при $n = 1$ возьмем в качестве блина (он тут единственный) произвольное ограниченное измеримое (по Лебегу, если это важно) множество $B \subset \mathbb{R}$. Меру Лебега будем (при всех n) обозначать символом vol.

Поскольку множество B измеримо, пересечение его с любым лучом в $\mathbb{R}$ также измеримо. Теперь для произвольного $t \in \mathbb{R}$ определим величину $f(t) \in \mathbb{R}$ равенством $f(t) = \operatorname{vol}(B \cap (-\infty, t])$. Тем самым f — функция одной переменной; исследуем ее свойства.

(1) Множество B ограничено, то есть $B \subset [c, d]$. Отсюда вытекает, что $f(c) = 0$ и $f(d) = \operatorname{vol}(B) > 0$.

(2) Пусть $t_1 < t_2$. Тогда $f(t_1) \le f(t_2)$ (то есть функция f возрастает) и $f(t_2) - f(t_1) = \operatorname{vol}(B \cap [t_1, t_2)) \le \operatorname{vol}([t_1, t_2)) = t_2 - t_1$. Отсюда очевидно вытекает, что функция f непрерывна.

Поскольку $\operatorname{vol}(B) > 0$, из теоремы о промежуточном значении следует существование точки $t_* \in [c, d]$ такой, что $f(t_*) = \operatorname{vol}(B)/2 \in [0, \operatorname{vol}(B)] = [f(d), f(c)]$. Эта точка t_* и есть гиперплоскость, которая делит объем (т.е. длину) блина B пополам. □

Доказательство при $n = 2$. Чтобы избежать технических трудностей, предположим теперь, что блины (их два) — выпуклые многоугольники B_1 и B_2 (с внутренностью, естественно). Рассмотрим вектор v длины 1, и пусть $m_v = \{sv \mid s \in \mathbb{R}\}$ — содержащая его прямая, а $p_v : \mathbb{R}^2 \to \ell_v$ — ортогональная проекция плоскости на эту прямую. Для произвольного t обозначим $\Pi_{v,t} \stackrel{\text{def}}{=} p_v^{-1}(\{sv \mid s \le t\})$ — полуплоскость, проекция которой на m_v это луч $v \cdot -(\infty, t]$. Дополнительную полуплоскость $p_v^{-1}(\{sv \mid s \ge t\})$ обозначим $\Pi'_{v,t}$.

Проекция $p_v(B_1) \subset m_v$ многоугольника B_1 на прямую — отрезок $v \cdot [c, d]$. Для каждого $t \in [c, d]$ прообраз $p_v^{-1}(tv) \cap B_1$ — отрезок (в силу выпуклости); обозначим $w(t)$ его длину. Как нетрудно видеть, функция w ограничена: $\exists K > 0 : w(t) \le K$ для всех $t \in [c, d]$. Рассмотрим теперь функцию $g_v(t) = \operatorname{vol}(B_1 \cap \Pi_{v,t})$, и пусть $t_1 < t_2$. Тогда $g_v(t_1) > g_v(t_2)$, и функция g_v удовлетворяет неравенству $g_v(t_1) - g_v(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} w(t)\,dt \le K(t_2 - t_1)$; отсюда следует, что g_v непрерывна. Но $g_v(d) = 0$, $g_v(c) = \operatorname{vol} B_1 > 0$, так что по теореме о промежуточном значении существует $t = t(v)$ такое, что $g_v(t(v)) = B_1/2$ — прямая $\ell_v \stackrel{\text{def}}{=} p_v^{-1}(t(v)v)$ (перпендикулярная вектору v) делит многоугольник B_1 на две равные по площади части. С другой стороны, из выпуклости B_1 следует, что $w(x) > 0$, когда x лежит в некоторой окрестности $t(v)$. Поэтому для любого $s \ne t(v)$ имеем $g_v(s) - g_v(t(v)) = \int_s^{t(v)} w(t)dt > 0$ — следовательно, $g(s) \ne \operatorname{vol}(B_1)/2$, то есть точка $t(v)$ (и прямая ℓ_v, перпендикулярная v) единственна.

Множество векторов v единичной длины — окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Определим функцию $f : S^1 \to \mathbb{R}$ равенством $f(v) = \operatorname{vol}(B_2 \cap \Pi_{v,t(v)}) - \operatorname{vol}(B_2 \cap \Pi'_{v,t(v)})$ и докажем, что она непрерывна.

Пусть R — наибольшее расстояния между точками многоугольников B_1 и B_2. Из геометрических соображений ясно, что для любых $v_1, v_2 \in S^1$ прямые ℓ_{v_1} и ℓ_{v_2}, делящие площадь многоугольника B_1 пополам, пересекаются внутри этого многоугольника. Отсюда вытекает, что $|f(v_1) - f(v_2)|$ не превосходит удвоенной площади кругового сектора радиуса R, сторонами которо служат прямые ℓ_{v_1} и ℓ_{v_2}. Поскольку эти прямые перпендикулярны v_1 и v_2 соответственно, получаем $|f(v_1) - f(v_2)| \le R^2\varphi$, где φ — угол между v_1 и v_2 — из этого неравенства, очевидно, вытекает непрерывность f.

Прямые ℓ_v и ℓ_{-v} параллельны. Из единственности прямой ℓ_v следует теперь, что $\ell_v = \ell_{-v}$. Следовательно, функция f — нечетная: $f(-v) = -f(v)$. Пусть теперь $z : [0, \pi] \to S^1$ — параметризация полуокружности с концами v и $-v$ (любой из двух) центральным углом. z — непрерывное отображение, поэтому отображение $f \circ z : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Значения $f(z(0)) = f(v)$ и $f(z(\pi)) = f(-v)$ отличаются знаком, поэтому по теореме о промежуточном значении существует такое $\psi \in [0, \pi]$, что $f(z(\psi)) = 0$. Это означает, что прямая ℓ_w, где $w = z(\psi)$, делит площади многоугольников B_1 и B_2 пополам. □

Доказательство (частичное) при $n = 3$. В этом случае блинов три, B_1, B_2 и B_3 — будем считать их выпуклыми многогранниками. Пусть v — вектор единичной длины, то есть элемент сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ с центром в начале координат. Аналогично случаю $n = 2$ докажем, что существует и единственна плоскость M_v, перпендикулярная v и делящая объем многогранника B_1 пополам. Пусть Π_v и Π'_v — полупространства, на которые M_v делит $\mathbb{R}^3$. Положим $g_2(v) = \mathrm{vol}(B_2 \cap \Pi_v) - \mathrm{vol}(B_2 \cap \Pi'_v)$ и $g_3(v) = \mathrm{vol}(B_3 \cap \Pi_v) - \mathrm{vol}(B_3 \cap \Pi'_v)$, и объединим их в одно отображение $g : S^2 \to \mathbb{R}^2$: $g(v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (g_2(v), g_3(v))$. Так же, как и в случае $n = 2$, доказывается, что g — непрерывное отображение. Лемма о блинах эквивалентна существованию вектора $v \in S^2$, для которого $g(v) = (0, 0)$ (начало координат).

(Непрерывной) кривой в множестве X мы будем называеть непрерывное отображение $\gamma : [0, 1] \to X$ (иными словами, речь идет о “параметризованных” кривых: $\gamma(t) \in X$ — точка, через которую кривая проходит в момент времени t). В дальнейшем мы будем пользоваться следующей важной леммой, которая (точнее, ее обобщение) будет доказана ближе к концу семестра:

Лемма. *Существует отображение* ind *(индекс) из множества непрерывных кривых на плоскости, не проходящих через начало координат, в множество действительных чисел $\mathbb{R}$ такое, что*

(1) *Если γ — такая кривая, а φ — величина угла между ненулевыми векторами $\gamma(0)$ и $\gamma(1)$, то $\mathrm{ind}(\gamma) - \varphi/(2\pi)$ — целое число.*
(2) *Если γ_1, γ_2 — две кривых, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, и кривая γ получается последовательным прохождением сначала γ_1, а потом γ_2, то $\mathrm{ind}(\gamma) = \mathrm{ind}(\gamma_1) + \mathrm{ind}(\gamma_2)$.*
(3) *Если γ_s — семейство непрерывных кривых, не проходящих через начало координат и непрерывно зависящих от параметра $s \in [0, 1]$, то индекс $\mathrm{ind}(\gamma_s)$ зависит от s непрерывно.*

Следствие. *Если $\gamma(0) = \gamma(1)$ (кривая замкнута), то ее индекс — целое число. Если γ_s — семейство непрерывных замкнутых кривых, не проходящих через начало координат и непрерывно зависящих от параметра $s \in [0, 1]$, то индекс $\mathrm{ind}(\gamma_s)$ одинаковый для всех s.*

Геометрический смысл индекса вполне нагляден — это количество оборотов, которое кривая делает вокруг начала координат. Строгое определение этой величины для *произвольной* непрерывной кривой на плоскости, тем не менее, сопряжено с некоторыми трудностями, так что отложим его. Последнее утверждение следствия вытекает из того, что непрерывная функция на отрезке, принимающая только целые значения, — константа (т.е. фактически из теоремы о промежуточном значении).

Отображение g нечетно: $g(v) = -g(v)$. Рассмотрим теперь две противоположные точки $v, -v \in S^2$ и соединим их большой дугой — половиной большого круга сферы, лежащего в некоторой фиксированной плоскости L_0. Когда точка u проходит эту дугу, точка $g(u)$ описывает кривую γ на плоскости, соединяющую две точки $a = g(v)$ и $-a = g(-v)$, симметричные относительно начала координат. Эта кривая не проходит через начало координат (если проходит, то лемма о блинах доказана), так что ее индекс — *полуцелое* число: $\mathrm{ind}(\gamma) = k + \frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть теперь точка u движется от $-v$ к v по второй половине того же большого круга на сфере. Из нечетности отображения g вытекает, что тогда точка $g(u)$ описывает кривую $-\gamma$, получающуюся из γ поворотом на угол π вокруг начала координат. Обозначим γ_s кривую, которая получается из γ поворотом вокруг начала координат на угол πs; здесь $s \in [0, 1]$. Кривые γ_s не проходят через начало координат и непрерывно зависят от s — из леммы вытекает, что $\mathrm{ind}(\gamma_s)$ постоянен (кривые γ_s не замкнуты, но непрерывная функция с *полуцелыми* значениями также постоянна). В частности, индекс кривой $-\gamma$ равен $k + \frac{1}{2}$.

Пусть теперь точка u пробегает весь большой круг сферы. В этом случае $g(u)$ пробегает кривую Γ_0, которая получается последовательным прохождением сначала γ, а потом $-\gamma$. Из леммы вытекает, что $\mathrm{ind}(\Gamma_0) = 2k+1$ — нечетное целое число. Обозначим теперь L_s плоскость, полученную поворотом плоскости L_0 (в которой лежал рассмотренный выше большой круг сферы) на угол πs вокруг оси, проходящей через точки v и $-v$. В каждой плоскости L_s рассмотрим большой круг, получающийся в пересечении со сферой. Когда точка u пробегает этот круг, точка $g(u)$ описывает на плоскости кривую Γ_s. Если Γ_s ни при каком $s \in [0, 1]$ не проходит через начало координат (а если проходит, то лемма о блинах доказана), то получается семейство замкнутых кривых на плоскости без начала координат, непрерывно зависящих от параметра s. Согласно следствию, индекс всех этих кривых одинаков и равен $2k+1$, то есть индексу Γ_0. Но плоскость L_1 совпадает с плоскостью L_0, а кривая Γ_1 — это та же кривая Γ_0, только пройденная в обратном направлении. Из леммы вытекает (подумайте, как!), что в этом случае $\mathrm{ind}(\Gamma_1) = -\mathrm{ind}(\Gamma_0) = -2k - 1$. Следовательно, $-2k - 1 = 2k + 1 = 0$, откуда $k = -1/2$. Это противоречит тому, что $k \in \mathbb{Z}$ и доказывает лемму о блинах при $n = 3$. $\square$

Лемма о блинах для бóльших n нам пока не по силам; она будет доказана в конце второго семестра курса — если успеем…