ЛЕКЦИЯ 2

Аннотация. Топологическая категория.

1. Напоминание: метрические пространства

Метрикой на множестве M называется функция $d : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, обладающая следующими свойствами:

(1) (невырожденность) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.
(2) (симметричность) $d(x, y) = d(y, x)$.
(3) (неравенство треугольника) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(Здесь везде $x, y, z \in M$ — произвольные точки.) Пара (M, d), состоящая из множества и метрики на нем, называется метрическим пространством. Подмножество $B(a, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in M \mid d(a, x) < r\} \subset M$ называется (открытым) шаром радиуса $r > 0$ с центром в точке a. Множество $U \subset M$ называется *открытым*, если оно представляет собой объединение открытых шаров (возможно, в бесконечном количестве). Пустое множество тоже открыто — по определению.

Свойства открытых множеств в метрическом пространстве:

Теорема 1. (1) *Объединение любого набора открытых множеств открыто.*
(2) *Пересечение любого конечного набора открытых множеств открыто.*
(3) *Пустое множество, а также все метрическое пространство (как подмножество самого себя) открыты.*

Эти свойства известны из курса анализа; приведем для полноты доказательство.

Доказательство. Свойство 1 очевидно.

Свойство 2, как легко видеть, достаточно доказать для случая, когда множеств два: U_1 и U_2. По определению $U_1 = \bigcup_{(a,r)\in A_1} B(a, r)$ и $U_2 = \bigcup_{(b,R)\in A_2} B(b, R)$, откуда $U_1 \cap U_2 = \bigcup_{(a,r)\in A_1,(b,R)\in A_2} B(a, r) \cap B(b, R)$. Ввиду свойства 1 достаточно доказать, что пересечение $B(a, r) \cap B(b, R)$ двух шаров открыто. Пусть $x \in B(a, r) \cap B(b, R)$, и пусть $\varepsilon = \varepsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} \min(r - d(a, x), R - d(b, x)) > 0$. Если $y \in B(x, \varepsilon)$, то $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(x, a) + r - d(x, a) = r$ и аналогично $d(b, y) < R$. Тем самым y принадлежит обоим пересекаемым шарам, то есть $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r) \cap B(b, R)$. Рассмотрим теперь объединение $X = \bigcup_{x\in B(a,r)\cap B(b,R)} B(x, \varepsilon(x))$. Как только что было доказано, $X \subset B(a, r) \cap B(b, R)$. С другой стороны всякий шар $B(x, \varepsilon(x))$ содержит свой центр, то есть точку x. Поскольку объединение берется по *всем* точкам $x \in B(a, r) \cap B(b, R)$, получается $B(a, r) \cap B(b, R) = X$. Но X — объединение шаров, то есть открытое множество.

Пустое множество открыто по определению, а M является объединением шаров с центром a и радиусом, например, 1 по всем точкам $a \in M$ — то есть тоже открыто. □

Отображение $f : M_1 \to M_2$ одного метрического пространства в другое (метрики в них обозначаются d_1 и d_2 соответственно) называется *непрерывным в точке* $a \in M_1$, если для всякого $\varepsilon > 0$ M_1 существует $\delta > 0$ такое, что если $d_1(x, a) < \delta$ $(x \in M_1)$, то $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Отображение называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке.

Теорема 2. *Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз произвольного отарытого множества $U \subset M_2$ открыт.*

Опять-таки, это теорема из курса анализа; приведем для полноты ее доказательство.

Доказательство. Пусть отображение f непрерывно, и пусть вначале $U = B(a, r) \subset M_2$ — шар с центром a и радиусом r. Если $x \in f^{-1}(U)$, это означает, что $f(x) \in U$, то есть $d_2(f(x), a) < r$. Пусть $\varepsilon = r - d_2(f(x), a) > 0$; выберем $\delta > 0$ из определения непрерывности в точке x. Если $y \in B(x, \delta)$, то $d_2(f(y), f(x)) < \varepsilon$, откуда $d_2(f(y), a) < \varepsilon + d(x, a) = r$, то есть $f(y) \in B(a, r)$. Следовательно, $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(a, r))$. Рассуждая, как в доказательстве теоремы 1, получим равенство $f^{-1}(B(a, r)) = \bigcup_{x\in f^{-1}(B(a,r))} B(x, \varepsilon)$, то есть $f^{-1}(B(a, r))$ открыто.

В общем случае $U = \bigcup_{(a,r)\in A} B(a, r)$, откуда $f^{-1}(U) = \bigcup_{(a,r)\in A} f^{-1}(B(a, r))$ — открыто.

Пусть теперь отображение f таково, что прообраз открытого множества открыт. Пусть $a \in M_2$, $\varepsilon > 0$ и $x \in f^{-1}(B(a, \varepsilon))$. Множество $f^{-1}(B(a, \varepsilon))$ — объединение шаров: $f^{-1}(B(a, \varepsilon)) = \bigcup_{(b,r)\in A} B(b, r)$; это означает, что $x \in B(b, r) \subset f^{-1}(B(a, \varepsilon))$ для некоторых $b \in M_2$, $r > 0$. Положим $\delta < r - d_1(b, x)$, и пусть $d_1(y, x) < \delta$. Тогда $d_1(b, y) \leq d_1(y, x) + d_1(b, x) < r$, то есть $y \in B(b, r)$. Отсюда $f(y) \in f(B(b, r)) \subset B(a, \varepsilon)$, то есть $d_2(f(y), a) < \varepsilon$, и непрерывность f в произвольной точке x доказана. □

Точка $A \in M_2$ называется пределом отображения $f : M_1 \to M_2$ в точке $a \in M_1$ (обозначение: $A = \lim_{x\to a} f(x)$), если отображение $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} A, & x = a, \\ f(x), & x \neq a. \end{cases}$ непрерывно в точке a.

Подмножество $L \subset M$ метрического пространства называется *замкнутым*, если для любой последовательности $x_n \in L$, имеющей предел $x_* \in M$, этот предел тоже принадлежит L.

Теорема 3. *Подмножество метрического пространства замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.*

Доказательство. (опять же, известно из курса анализа)

Пусть L замкнуто. Если для каждой точки $x \in M \setminus L$ найдется $r(x) > 0$ такое, что $B(x, r(x))$ не пересекается с L, то, как обычно, получим, что $M \setminus L = \bigcup_{x\in M\setminus L} B(x, r(x))$ и, следовательно, открыто. Если же для некоторого $x_* \in M \setminus L$ и произвольного $r > 0$ пересечение $B(x, r) \cap L$ непусто, то возьмем в качестве x_n произвольную точку из $B(x, 1/n)\cap L$. Тогда $d(x_*, x_n) < 1/n$, откуда вытекает, что $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$. Но $x_n \in L$, а $x_* \notin L$ вопреки предположению о замкнутости.

Обратно, пусть $M \setminus L$ открыто и $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$. Если $x_* \in M \setminus L$, то из открытости следует (докажите!) существование $r > 0$ такого, что $B(x, r) \subset M \setminus L$. Но тогда $d(x_*, x_n) \geq r$ для всех n, что невозможно по определению предела. Значит, $x_* \in L$. □

2. Топологическое пространство

Определение 1. *Топологией* на множестве X называется набор подмножеств $\mathcal{T} = \{U_\alpha\}$, $U_\alpha \subseteq X$ (называемых *открытыми*), обладающий свойствами открытых множеств из теоремы 1. Множество с заданной на нем топологией называется топологическим пространством.

Подмножество $L \subset X$ называется замкнутым, если его дополнение $X \setminus L$ открыто.

Определение 2. Отображение $f : X \to Y$ между двумя топологическими пространствами называется непрерывным, если прообраз любого открытого множества открыт: если $U \subset Y$ открыто (в топологии пространства Y), то $f^{-1}(U) \subset X$ открыто (в топологии пространства X).

Говорят, что отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке $a \in X$, если для любого открытого подмножества $U \subset Y$, содержащего точку $f(a)$, существует открытое подмножество $V \subset f^{-1}(U)$, содержащее точку a. Нетрудно доказать (проделайте!), что отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке. Определение предела отображения топологических пространств в точке a такое же, как было в метрическом случае.

Теорема (основное свойство непрерывных отображений)**.** *Композиция непрерывных отображений непрерывна.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ непрерывны, и $U \subset Z$ открыто. Тогда $g^{-1}(U) \subset Y$ открыто в силу непрерывности g, а $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \subset X$ открыто в силу непрерывности f. □

Примеры топологических пространств и непрерывных отображений:

Пример 0. X — метрическое пространство, и множество открыто, если оно является объединением шаров. Этот пример был разобран выше. Если топология в топологическом пространстве порождается метрикой, то пространство называется метризуемым.

Пример 1. Дискретная топология: множество X произвольное, и любое подмножество $U \subset X$ считается открытым. На самом деле эта топология метризуема — порождается “дискретной метрикой” d, в которой $d(x, x) = 0$ и $d(x, y) = 1$ для любых $x \neq y$. Любое отображение из дискретного пространство в любое пространство, очевидно, является непрерывным. Отображение из топологического пространства в дискретное, напротив, далеко не всегда непрерывно: для этого необходимо и достаточно, чтобы прообраз любой точки был открыт (докажите!).

Пример 2. Антидискретная топология: произвольное множество X, и в нем открытыми подмножествами считаются только пустое и само множество X. Эта топология не метризуема (если в X больше одного элемента) — докажите это самостоятельно; см. также ниже про хаусдорфовость. Любое отображение из любого пространства в антидискретное непрерывно (следует из свойства 3).

Пример 3. Пространство X произвольное, а подмножество $U \subset X$ открыто, если оно пустое или его дополнение $X \setminus U$ конечно (вариант: не более чем счетно).

Пример 4. X — частично упорядоченное множество; подмножество U открыто, если для всякого $a \in U$ любой элемент $b \leq a$ также принадлежит U. Простейший пример: $X = \{a, b\}$, где $a > b$. Открытые подмножества здесь $\varnothing$, $\{b\}$ и X. Это пространство отличается от предыдущих тем, что в нем, как нетрудно видеть, пересечение *любого* семейства открытых множеств открыто (а не только конечного).

Определение 3. Топологическое пространство X называется хаусдорфовым, если для любых двух различных точек $a, b \in X$ существуют открытые множества $U, V \subset X$ такие, что $a \in U$, $b \in V$ и $U \cap V = \varnothing$.

Теорема 4. *Если топология в пространстве X порождена метрикой, то она хаусдорфова.*

Доказательство. Пусть d — метрика, $a, b \in X$ — две различные точки. Определим $r \stackrel{\text{def}}{=} d(a, b) > 0$, и пусть $U = B(a, r/2)$, $V = B(v, r/2)$. Очевидно, $a \in U, b \in V$ (шар содержит свой центр). Существование же точки $c \in U \cap V$ противоречит неравенству треугольника: $d(c, a) < r/2$, $d(c, b) < r/2$, но $d(a, b) = r > d(c, a) + d(c, b)$. $\square$

Пример 5. Пространство с антидискретной топологией (пример 2), очевидно, не хаусдорфово (и, следовательно, не порождается никакой метрикой), если содержит больше одного элемента. Пространство примера 3 не хаусдорфово, если X бесконечно (в "счетном" варианте — более чем счетно) — более того, в таком пространстве любые два непустых открытых множества пересекаются.

Пространство примера 4 также не хаусдорфово, если только отношение частичного порядка не "пустое" (т.е. есть хотя бы два различных элемента a, b, для которых $a \le b$): здесь открытое подмножество V, содержащее b, содержит также и a (и, следовательно, пересекается с любым множеством U, содержащим a).

Хаусдорфово пространство также не обязательно порождается метрикой — пример мы приведем в следующей лекции.

3. Понятие категории. Категория топологических пространств.

Определение 4. Категория — набор объектов со следующей структурой: для каждых двух объектов A, B категории ($A = B$ не исключается) определено множество $\mathrm{Mor}(A, B)$ (может быть и пустым), называемое множеством морфизмов из A в B. Для любых трех объектов A, B, C определено отображение $\circ : \mathrm{Mor}(B, C) \times \mathrm{Mor}(A, B) \to \mathrm{Mor}(A, C)$, называемое композицией морфизмов и обладающее свойством ассоциативности: если $f \in \mathrm{Mor}(C, D)$, $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$, $h \in \mathrm{Mor}(A, B)$, то $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \in \mathrm{Mor}(A, D)$. Кроме того, для каждого объекта A имеется выделенный морфизм $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}(A, A)$ такой, что $\mathrm{id}_A \circ f = f$ и $g = g \circ \mathrm{id}_A$ для произвольных морфизмов $f \in \mathrm{Mor}(B, A)$ и $g \in \mathrm{Mor}(A, B)$.

Два объекта A и B категории называются *эквивалентными*, если существуют морфизмы $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ и $g \in \mathrm{Mor}(B, A)$ такие, что композиции $g \circ f = \mathrm{id}_A$ и $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Лемма 1. *Отношение эквивалентности объектов категории рефлексивно, симметрично и транзитивно.*

Доказательство. Рефлексивность. Если $A = B$, то положим $f = g = \mathrm{id}_A$. Таким образом, любой объект эквивалентен сам себе.
Симметричность. Очевидна.
Транзитивность. Пусть $A \sim B$ (морфизмы $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ и $g \in \mathrm{Mor}(B, A)$), а $B \sim C$ (морфизмы $p \in \mathrm{Mor}(B, C)$ и $q \in \mathrm{Mor}(C, B)$). Положим $u \stackrel{\text{def}}{=} p \circ f \in \mathrm{Mor}(A, C)$, $v \stackrel{\text{def}}{=} g \circ q \in \mathrm{Mor}(C, A)$. Тогда $v \circ u = (p \circ f) \circ (g \circ q) = (p \circ (f \circ g)) \circ q$ (ассоциативность) $= (p \circ \mathrm{id}_B) \circ q = p \circ q = \mathrm{id}_A$ и аналогично $u \circ v = \mathrm{id}_C$. Тем самым объекты A и C эквивалентны. $\square$

Пример 6. Категория множеств **Set**: объекты — произвольные множества, $\mathrm{Mor}(A, B)$ — множество отображений из множества A в множество B, композиция — композиция отображений. Два множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они равномощны (содержат одно и то же колиечество элементов).

Пример 7. Категория **Top**: объекты — топологические пространства, $\mathrm{Mor}(A, B)$ — множество непрерывных отображений из A в B, композиция — композиция отображений. Эквивалентность в этой категории называется *гомеоморфизмом.*

Вообще, по этой схеме строятся многочисленные категории: объекты — множества с какой-нибудь дополнительной структурой (линейные пространства, группы, многообразия и т.п.), $\mathrm{Mor}(A, B)$ — множество отображений из A в B, сохраняющих эту структуру (линейных отображений, гомоморфизмов, гладких отображений), композиция — композиция. Такие категории называются конкретными, а эквивалентные объекты в них — изоморфными.

Существуют, однако, и другие категории.

Пример 8. Категория с единственным объектом $*$. Множество морфизмов $\mathrm{Mor}(*, *)$ снабжено ассоциативной операцией композиции, относительно которой имеется тождественный элемент id_*. Тем самым, такая категория — полугруппа с единицей (моноид).

Пример 9. Пусть X — ориентированный граф. Объекты *свободной категории, порожденной* X — вершины графа, а $\mathrm{Mor}(a, b)$ — множество ориентированных путей, соединяющих вершины a и b. Композиция морфизмов — приклеивание начала одного пути (из b в c) к концу другого (из a в b). Тождественный морфизм $\mathrm{id}_a \in \mathrm{Mor}(a, a)$ — тривиальный "путь нулевой длины" из вершины a. Тождественный морфизм в этой категории не может быть композицией нетождественных морфизмов, поэтому эквивалентны здесь только совпадающие объекты (вершины).

Пример 10. Вариант той же идеи, что и в примере 9: любое множество с отношением частичного предпорядка (т.е. рефлексивным и транзитивным, но не обязательно антисимметричным) – множество объектов категории; при этом множество $\mathrm{Mor}(a,b)$ содержит единственный элемент, если $a \le b$, и пусто, если это не так. Композиция очевидна: если $a \le b \le c$, то композицией единственных элементов $\mathrm{Mor}(a,b)$ и $\mathrm{Mor}(b,c)$ будет единственный элемент $\mathrm{Mor}(a,c)$ — он существует, поскольку $a \le c$ в силу транзитивности. Тождественный морфизм — единственный элемент $\mathrm{Mor}(a,a)$ (он существует в силу рефлексивности). Два объекта a и b эквивалентны, если $a \le b \le a$; если отношение является отношением порядка (т.е. антисимметрично), то это возможно только при $a = b$.

Функтором между категориями $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ называется соответствие F, сопоставляющее каждому объекту A категории $\mathbf{C}$ объект $F(A)$ категории $\mathbf{D}$, а каждому морфизму $h \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(A,B)$ — морфизм $F(h) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(F(A),F(B))$ так, что композиция переходит в композицию ($F(g \circ h) = F(g) \circ F(h)$ для произвольных морфизмов $g \in \mathrm{Mor}(B,C)$, $h \in \mathrm{Mor}(A,B)$), а тождественный морфизм в тождественный ($F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$).

Пример 11. “Забывающий функтор” сопоставляет каждому объекту категории **Top** — топологическому пространству X — объект категории **Set** — то же самое пространство, но рассматриваемое просто как множество; при этом морфизму — непрерывному отображению — соответствует он же, но просто как отображение множеств. Подобные функторы определены и для всех конкретных категорий (наличие такого функтора и составляет определение конкретной категории).

Мы будем широко пользоваться в этом курсе языком категорий и функторов, но конкретные свойства их будем изучать в минимальном объеме и не раньше, чем они нам понадобятся.