ЛЕКЦИЯ 5

Аннотация. Теорема о поднятии гомотопии. Гомотопическая классификация отображений из окружности в окружность.

Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется ретракцией, если $f(y) = y$ для любого $y \in Y$ — иными словами, если $f \circ \iota_{Y,X} = \mathrm{id}_Y$, где $\iota_{Y,X} : Y \to X$ — тавтологическое вложение. Если композиция $\iota_{Y,X} \circ f : X \to X$ гомотопна тождественному отображению $X \to X$, то ретракция f называется дефорацмонной. Если (деформационная) ретракция $X \to Y$ существует, то Y называется (деформационным) ретрактом X.

Очевидно, деформационный ретракт X гомотопически эквивалентен самому X — ретрация $f : X \to Y$ и $\iota_{Y,X} : Y \to X$ и образуют гомотопическую эквивалентность.

Пример 1. Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, а $S \subset \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ — $(n-1)$-мерная сфера с центром a. Для произвольной точки $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ обозначим $f(b) \in S$ точку пересечения луча ab со сферой S. Очевидно, $f : \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \to S$ — ретракция. Для любого $t \in [0,1]$ точка $f_t(b) \stackrel{\text{def}}{=} tb + (1-t)f(b)$ лежит в $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ (почему?), откуда получается, что отображение $f \circ \iota_{S,\mathbb{R}^n\setminus\{a\}}$ гомотопно тождественному, то есть f — деформационная ретракция. Тем самым сфера S^{n-1} гомотопически эквивалентна $\mathbb{R}^n$ без (произвольной) точки.

Как обычно, обозначим $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, и пусть $p : \mathbb{R} \to S^1$ — отображение, заданное формулой $p(t) = \exp(2\pi i t)$. Отображение p непрерывное и периодическое с периодом 1: $p(t+1) = p(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Все рассуждения ниже опираются на следующую техническую лемму:

Лемма о поднятии гомотопии. *Пусть $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $f : [0,1]^n \to S^1$ — непрерывное отображение, а $u \in \mathbb{R}$ — число, для которого $p(u) = f(0,\dots,0)$. Тогда существует и единственно непрерывное отображение $F : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ такое, что $F(0,\dots,0) = u$ и $p \circ F = f$.*

Прежде чем доказывать эту лемму, покажем, как она “работает”.

Пусть $h : S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение; обозначим $q = p|_{[0,1]} : [0,1] \to S^1$, и пусть $f = h \circ q : [0,1] \to S^1$. Выберем произвольное $u \in \mathbb{R}$ такое, что $f(0) = p(u)>$ и пусть $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ — его поднятие (из леммы о поднятии). Из равенства $q(0) = q(1) (= 1 \in S^1)$ вытекает, что $p(F(0)) = f(0) = f(1) = p(F(1))$ и, следовательно, $F(1) - F(0) \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1. *Число $F(1) - F(0)$ зависит только от отображения $h : S^1 \to S^1$ (и называется его индексом, $\mathrm{ind}(h)$). Отображения $h_0 : S^1 \to S^1$ и $h_1 : S^1 \to S^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда $\mathrm{ind}(h_1) = \mathrm{ind}(h_0)$.*

Доказательство. Поднятие F отображения $f = q \circ h$ зависит, согласно лемме, только от f (которое однозначно определяется отображениемh) и от выбора точки u. Пусть $\tilde{u} \in \mathbb{R}$ — другая точка, для которой $p(\tilde{u}) = f(0) = p(u)$; тогда $\tilde{u} - u \in \mathbb{Z}$. Отображение $\tilde{F} : [0,1] \to \mathbb{R}$, заданное формулой $\tilde{F}(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(t) + (\tilde{u} - u)$, является поднятием f: $p(\tilde{F}(t)) = p(F(t) + (\tilde{u} - u) = p(F(t)) = f(t)$, и притом $\tilde{F}(0) = F(0) + \tilde{u} - u = \tilde{u}$. Но $\tilde{F}(1) - \tilde{F}(0) = F(1) - F(0)$, откуда вытекает первое утверждение теоремы.

Пусть $h_0 \sim h_1$, и h_t — гомотопия. Определим отображение $f : [0,1]^2 \to S^1$ равенством $f(t,s) = h_t(q(s))$, и пусть $F : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ — его поднятие. Для всех $t \in [0,1]$ имеет место равенство $f(t,0) = h_t(q(0)) = h_t(q(1)) = f(t,1)$, откуда $F(t,1) - F(t,0) \in \mathbb{Z}$. Топология в пространстве $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ дискретная, а отрезок $[0,1]$ связен, откуда вытекает, что $F(t,1) - F(t,0) = const.$ (не зависит от $t \in [0,1]$). Следовательно, $\mathrm{ind}(h_1) = F(1,1) - F(1,0) = F(0,1) - F(0,0) = \mathrm{ind}(h_0)$.

Обратно, пусть $\mathrm{ind}(h_0) = \mathrm{ind}(h_1) \stackrel{\text{def}}{=} k$. Обозначим $f_0 = h_0 \circ q$, $f_1 = h_1 \circ q$, и пусть $F_0, F_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ — произвольные поднятия f_0 и f_1 соответственно. В силу первого утверждения теоремы $F_1(1) - F_1(0) = k = F_0(1) - F_0(0)$. Определим отображение $\Phi : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ формулой $\Phi(t,s) = sF_1(t) + (1-s)F_0(t)$; тогда $\Phi(1,s) - \Phi(0,s) = s(F_1(1) - F_1(0)) + (1-s)(F_0(1) - F_0(0)) = k \in \mathbb{Z}$. Положим $f_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} p(\Phi(t,s))$, тогда $f_s(1) = p(\Phi(1,s)) = p(\Phi(0,s)) = f_s(0)$. Поскольку $q : [0,1] \to S^1 = [0,1]/(0 \sim 1)$ — стандартное отображение проекции на фактор, равенство $f_s(1) = f_s(0)$ означает, что существует и единственна такая гомотопия h_s отображений $S^1 \to S^1$, что $f_s = h_s \circ q$ при всех $s \in [0,1]$. Эта гомотопия соединяет h_0 и h_1. □

Следствие 1. *Окружность S^1 не стягиваема.*

Доказательство. Пусть $h = \mathrm{id} : S^1 \to S^1$ — тождественное отображение. Тогда $h \circ q = q$, и поднятием q является тавтологическое вложение $\iota : [0,1] \to \mathbb{R}$. Отсюда вытекает, что $\mathrm{ind}(\mathrm{id}) = \iota(1) - \iota(0) = 1 - 0 = 1$. Если же h — отображение, переводящее всю окружность в точку, то $f = h \circ q$ — постоянное отображение $[0,1] \to S^1$. Его поднятие $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ — также постоянное отображение, откуда $\mathrm{ind}(h) = F(1) - F(0) = 0$. Следовательно, тождественное отображение окружности в себя не гомотопно отображению в точку, что и означает нестягиваемость. □

Следствие 2. *Полуплоскость* $\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ *не гомеоморфна плоскости* $\mathbb{R}^2$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{R}^2$ — произвольная точка. Согласно примеру 1, $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ гомотопически эквивалентно окружности. С другой стороны, $\Pi \setminus \{(0,0)\}$ — стягиваемое множество: гомотопия отображений $f_t(b) = (1-t)b + tb_0$, где $b_0 = (0,1)$, а $t \in [0,1]$, соединяет отображение $f_0 = \mathrm{id}_{\Pi \setminus \{(0,0)\}}$ с отображением f_1, переводящим всю $\Pi \setminus \{(0,0)\}$ в точку b_0 (проверьте, что все f_t действительно отображают $\Pi \setminus \{(0,0)\}$ в себя). Поскольку окружность не стягиваема, $\Pi \setminus \{(0,0)\}$ гомотопически не эквивалентно и, следовательно, не гомеоморфно $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ при любом a. Отсюда и вытекает (почему?), что Π и $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфны. □

Перейдем теперь к доказательству леммы о поднятии гомотопии. Заметим вначале, что отображение $p : \mathbb{R} \to S^1$ — локальный гомеоморфизм: для всякого $u \in \mathbb{R}$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $p|_{(u-\varepsilon, u+\varepsilon)}$ — гомеоморфизм $(u - \varepsilon, u + \varepsilon) \to p((u - \varepsilon, u + \varepsilon))$. Отображение, обратное к этому гомеоморфизму, обозначим $q_{u,\varepsilon}$.

Это замечание позволяет доказать такое утверждение:

Лемма 1. *Пусть* $M \subset [0,1]^n$ *— связное подмножество, содержащее* $(0,\ldots,0)$*. Тогда если поднятие* $F : M \to \mathbb{R}$ *существует, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $F_1, F_2 : M \to \mathbb{R}$ — два поднятия. Множество $E \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{t = (t_1,\ldots,t_n) \in M \mid F_1(t) = F_2(t)\} \subset M$ замкнуто как прообраз одноточечного множества $\{0\}$ при непрерывном отображении $F : M \to \mathbb{R}$, где $F(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F_1(t) - F_2(t)$. Пусть теперь $t \in E$ и $u = F_1(t) = F_2(t)$. Выберем достаточно малое $\varepsilon > 0$; тогда образ $p((u - \varepsilon, u + \varepsilon)) \subset S^1$ содержит открытую дугу α с центром в точке $p(u) = p(F_1(t)) = p(F_2(t)) = f(t)$. В силу непрерывности f существует $\delta > 0$ такое, что $f(s) \in \alpha$ при всех $s \in [0,1]^n$ таких, что $|s - t| < \delta$. Но тогда при всех таких s получаем $F_1(s) = q_{u,\varepsilon}(f(s)) = F_2(s)$, то есть $s \in E$. Это означает, что множество E открыто. Кроме того, $0 \in E$, так что E непусто. Из связности множества M вытекает, что $E = M$, что и доказывает лемму. □

Докажем теперь лемму о поднятии индукцией по n.

База индукции: $n = 1$. Определим подмножество $T \subset [0,1]$ чисел s таких, что существует (и, следовательно, единственно) поднятие f — непрерывное отображение $F : [0,t] \to \mathbb{R}$, для которого $F(0) = u$ и $p \circ F = f$. Множество T непусто, поскольку $0 \in T$.

Лемма 2. *Если* $t \in T$ *и* $0 \leq s \leq t$*, то* $s \in T$*.*

Доказательство. В качестве поднятия на отрезке $[0,s]$ можно использовать ограничение на этот отрезок поднятия $F : [0,t] \to \mathbb{R}$. □

Лемма 3. *Множество* $T \subset [0,1]$ *открыто*

Доказательство. Это вытекает из того, что p — локальный гомеоморфизм и доказывается так же (продумайте подробности!), как открытость множества E в лемме 1. □

Пусть $\tau = \sup T$; докажем, что $\tau \in T$. Пусть $\alpha \subset S^1$ — короткая дуга с центром в точке $f(\tau)$; тогда прообраз $p^{-1}(\alpha) \subset \mathbb{R}$ — объединение интервалов одинаковой длины $\ell < 1$, получающихся друг из друга параллельным переносом на целые числа. В зависимости от расположения дуги α либо каждый такой интервал содержит одно целое число, либо целые числа лежат между соседними интервалами (по одному в каждом промежутке). Обозначим $\lambda : p^{-1}(\alpha) \to \mathbb{Z}$ функцию, сопосталвющую каждой точке $x \in p^{-1}(\alpha)$ наибольшее целое число, лежащее слева от того интервала, которому принадлежит x. Функция λ постоянна на каждом интервале (и, следовательно, непрерывна) и переводит разные интервалы в разные числа. Возьмем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $f(s) \in \alpha$ при $s \in (\tau - \varepsilon, \tau)$. Функция $\lambda \circ F : (\tau - \varepsilon, \tau) \to \mathbb{Z}$ непрерывна (как композиция непрерывных); при этом $(\tau - \varepsilon, \tau)$ связно, а $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ дискретно. Следовательно, $\lambda(F(s)) = const.$ при $s \in (\tau - \varepsilon, \tau)$, то есть $F(s)$ при всех таких s принадлежит одному и тому же интервалу. Функция p на этом интервале обратима (обозначим обратную q), так что можно положить по определению $F(\tau) = q(f(\tau))$, и функция F при этом будет непрерывна в точке τ. Следовательно, $\tau \in T$.

Из леммы 2 вытекает теперь, что T замкнуто (является отрезком). В силу связности $[0,1]$ получем $T = [0,1]$ — база индукции доказана.

Шаг индукции. Пусть $F_0 : [0,1]^{n-1} \to \mathbb{R}$ — поднятие отображения $f|_{t_n=0} : [0,1]^{n-1} \to S^1$, для которого $F_0(0,\dots,0) = u$; оно существует (и,следовательно, единственно) по предположению индукции. Для произвольного $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_{n-1}) \in [0,1]^{n-1}$ пусть $\Phi_\tau : [0,1] \to \mathbb{R}$ — поднятие отображения $f|_{(t_1=\tau_1,\dots,t_{n-1}=\tau_{n-1})} : [0,1] \to S^1$, для которого $\Phi_\tau(0) = F_0(\tau_1,\dots,\tau_{n-1})$; оно существует в силу базы индукции. Положим теперь $F(t_1,\dots,t_n) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{(t_1,\dots,t_{n-1})}(t_n)$; равенство $p \circ F = f$ очевидно, и в доказательстве нуждается только непрерывность F.

Пусть, как выше, $\alpha \subset S^1$ — короткая дуга с центром в точке $f(t)$, прообраз которой $p^{-1}(\alpha) \subset \mathbb{R}$ — объединение интервалов длины $\ell < 1$, получающихся друг из друга сдвигами на целые числа. Определим функцию $\lambda : p^{-1}(\alpha) \to \mathbb{Z}$ (постоянную на каждом интервале), как в доказательстве базы индукции.

Лемма 4. *Функция F непрерывна в точке $t \in [0,1]^n$ тогда и только тогда, когда существует окрестность U точки t (то есть открытое множество $U \subset [0,1]^n$ такое, что $t \in U$), на которой функция $\lambda \circ F$ постоянна.*

Доказательство. Если F непрерывна в t, то $\lambda \circ F : U \to \mathbb{Z}$ непрерывна, и, если U линейно связно (например, шар), то постоянна. Обратно, пусть $\lambda \circ F$ постоянна на множестве U. Уменьшая при необходимости окрестность U, можно добиться, чтобы $f(U) \subset \alpha$ (это возможно, поскольку f непрерывно в точке t). Тогда при всех $t \in U$ значение $F(t)$ лежит в одном и том же интервале $(u-\varepsilon, u+\varepsilon) \subset p^{-1}(\alpha)$ с центром в точке $u \in p^{-1}(f(t))$. Тогда $F|_U = q_{u,\varepsilon} \circ f$ непрерывно (где, как и выше, $q_{u,\varepsilon}$ — обратное отображение к ограничению p на интервал $(u-\varepsilon, u+\varepsilon)$). □

Рассмотрим теперь множество $T \subset [0,1]$, состоящее из тех t, для которых ограничение F на параллелепипед $[0,1]^{n-1} \times [0,t]$ непрерывно. Множество T непусто, поскольку $0 \in T$ в силу конструкции F.

Лемма 5. *Множество T открыто.*

Доказательство. Пусть $t \in T$; тогда, согласно лемме 4, для каждой точки $\tau \in [0,1]^{n-1}$ существует параллелепипед $\Pi_\tau \subset [0,1]^{n-1} \times \{t\}$ с центром в этой точке и число $\delta_\tau > 0$ такие, что ограничение функции $\lambda \circ F$ на $\Psi_\tau \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_\tau \times (t-\delta_\tau, t+\delta_\tau)$ постоянно. Очевидно, $\bigcup_{\tau \in [0,1]^{n-1}} \Pi_\tau = [0,1]^{n-1} \times \{t\}$; соглсно теореме о компактности параллелепипеда, существует конечный набор точек $\tau_1,\dots,\tau_N \in [0,1]^{n-1}$ таких, что $[0,1]^{n-1} \times \{t\} = \Phi_{\tau_1} \cup \dots \cup \Phi_{\tau_N}$. (Теорема — для покрытия ограниченного замкнутого множества открытыми — известна из курса анализа; ее обобщение мы докажем позднее в этом курсе. Впрочем, для покрытия куба параллелепипедами теорему легко доказать и непосредственно.)

Возьмем $\delta = \min(\delta_{\tau_1},\dots,\delta_{\tau_N}) > 0$; тогда, очевидно, $\Psi_{\tau_1} \cup \dots \cup \Psi_{\tau_N} \supset [0,1] \times (t-\delta, t+\delta)$. Следовательно, ограничение $\lambda \circ F$ на $[0,1]^{n-1} \times (t-\delta, t+\delta)$ постоянно, откуда согласно лемме 4 получаем $(t-\delta, t+\delta) \subset T$. □

Пусть $t_* = \sup T$.

Лемма 6. $t_* \in T$.

Очевидно, из леммы 6 вытекает, что множество T — отрезок (ср. доказательство базы индукции). Вместе с леммой 5 это завершает доказательство леммы о поднятии гомотопии.

Доказательство леммы 6. Согласно лемме 4, для произвольной точки $\tau \in [0,1]^{n-1}$ найдутся параллелепипед $\Pi_\tau \subset [0,1]^{n-1}$ и число $\delta_\tau > 0$ такие, что $f(\Pi_\tau \times (t_*-\delta_\tau, t_*+\delta_\tau)) \subset \alpha$ (где $\alpha \subset S^1$ — короткая дуга с центром в точке t_*), и $\lambda \circ F$ постоянна на $(t_*-\delta_\tau, t_*) \times \Pi_\tau$. Далее рассуждаем, как в доказательстве леммы 5: функция $\lambda \circ F$ постоянна на любом интервале $\tau \times (t_*-\delta, t_*+\delta) \subset V \times (t_*-\delta, t_*+\delta)$ по соображениям связности и, следовательно, постоянна на всем $\Pi_\tau \times (t_*-\delta, t_*+\delta)$. Отсюда по той же лемме 4 получаем, что F непрерывна в точке $(\tau, t_*) \in [0,1]^n$. В силу произвольности $\tau \in [0,1]^{n-1}$ получаем, что $t_* \in T$. □