ЛЕКЦИЯ 7

Аннотация. Фундаментальный группоид и фундаментальная группа.

1. **Фундаментальный группоид.** Пусть X — топологическое пространство, $a, b \in X$. Непрерывное отображение $f : [0,1] \to X$, для которого $f(0) = a$ и $f(1) = b$, называется путем, соединяющим точки a и b. Иными словами, путь между a и b это гомотопия отображений $* \to X$ (где $*$ — топологическое пространство из одной точки), соединяющая отображения $p_a \equiv a$ и $p_b \equiv b$. Если γ_1 — путь из a в b, а γ_2 — путь из b в c, то их композиция $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ определяется обычной формулой композиции в гомотопической категории:

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ \gamma_2(2t-1), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Непрерывное отображение $F : [0,1]^2 \to X$ называется гомотопией путей, соединяющей пути $f_0(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(t,0)$ и $f_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(t,1)$ из точки a в точку b, если $F(0,s) \equiv a$ и $F(1,s) \equiv b$ — иными словами, для всякого $s \in [0,1]$ отображение $f_s : [0,1] \to X$, определенное формулой $f_S(T) = F(t,s)$, — путь, соединяющий точки a и b. Пути между точками a и b называются гомотопными, если существует соединяющая их гомотопия путей.

Теорема 1. (1) *Отношение гомотопности путей — отношение эквивалентности.*

(2) *Если путь f_0 из a в b гомотопен пути f_1, а путь g_0 из b в c — пути g_1, то путь $f_0 \cdot g_0$ из a в c гомотопен $f_1 \cdot g_1$.*

Доказательство теоремы — стандартное упражнение.

Из теоремы вытекает, что множество $\mathcal{P}_X(a,b)$ путей из a в b распадается на классы гомотопии; множество этих классов обозначим $P_X(a,b)$. Умножение путей определяет бинарную операцию (тоже называемую умножением) $\cdot : P_X(a,b) \times P_X(b,c) \to P_X(a,c)$ классов гомотопии путей.

Теорема 2. (1) *Операция $\cdot$ ассоциативна: $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3 = \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$ для всех $\gamma_1 \in P_X(a,b)$, $\gamma_2 \in P_X(b,c)$, $\gamma_3 \in P_X(c,d)$.*

(2) *Для каждой точки $a \in X$ обозначим $\mathbf{1}_a \in P_X(a,a)$ класс гомотопии пути $\epsilon_a(t) \equiv a$. Тогда $\gamma \cdot \mathbf{1}_b = \gamma = \mathbf{1}_a \cdot \gamma$ для всех $\gamma \in P(a,b)$.*

(3) *Для каждого $\gamma \in P_X(a,b)$ обозначим $\gamma^{-1} \in P_X(b,a)$ класс гомотопии пути $\tilde{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(1-t)$, где u — любой представитель класса гомотопии γ. Тогда класс γ^{-1} не зависит от выбора пути u и обладает свойствами $\gamma \cdot \gamma^{-1} = \mathbf{1}_a$, $\gamma^{-1} \cdot \gamma = \mathbf{1}_b$.*

Доказательство. Если $u_1 : [0,1] \to X$ — путь из a в b, а $u_2 : [0,1]$ — путь из b в c, то для удобства обозначим $u_1 \sqcup u_2 : [0,2] \to X$ отображение, заданное формулой

$$(u_1 \sqcup u_2)(t) = \begin{cases} u_1(t), & 0 \le t \le 1, \\ u_2(t-1), & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Аналогично, если $u_3 : [0,1] \to X$ — путь из c в d, определяется $u_1 \sqcup u_2 \sqcup u_3 : [0,3] \to X$.

Свойство 1. Пусть u_1, u_2, u_3 — представители классов гомотопии $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ из свойства 1, то $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_3$ — класс гомотопии пути $v_0 = (u_1 \sqcup u_2 \sqcup u_3) \circ \ell_0$, где $\ell_0 : [0,1] \to [0,3]$ — кусочно-линейная функция, определяемая равенством $\ell_0(t) = \begin{cases} 4t, & 0 \le t \le 1/2, \\ 2t+1, & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$ Аналогично, $\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_3)$ — класс гомотопии пути $v_1 = (u_1 \sqcup u_2 \sqcup u_3) \circ \ell_1$, где $\ell_1 : [0,1] \to [0,3]$ определяется равенством $\ell_1(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1/2, \\ 4t-1, & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$ Гомотопия, соединяющая эти пути, задается формулой $v_s = (u_1 \sqcup u_2 \sqcup u_3) \circ \ell_s$, где $\ell_s : [0,1] \to [0,3]$ определяется как $\ell_s(t) = s\ell_1(t) + (1-s)\ell_0(t)$. Поскольку $\ell_0(0) = \ell_1(0) = \ell_s(0) = 0$ и $\ell_0(1) = \ell_1(1) = \ell_s(1) = 3$ для всех s, это гомотопия путей из a в d. Тем самым классы гомотопии совпадают.

Свойство 2. Пусть $u : [0,1] \to X$ — произвольный представитель класса γ. Тогда $u_1 \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_a \cdot u = u \circ \ell$, где $\ell : [0,1] \to [0,1]$ задается равенством $\ell(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1/2, \\ 2t-1, & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$ Гомотопия путей $u_0 = u$ и $u_1 = \epsilon_a \cdot u$ задается равенством $u_s(t) = u \circ \ell_s$, где $\ell_s(t) = s\ell(t) + (1-s)t$.

Свойство 3. Пусть $\iota(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1-t$. Если путь u_0 гомотопен пути u_1, то путь $\tilde{u}_0 = u_0 \circ \iota$ гомотопен пути $\tilde{u}_1 = u_1 \circ \iota$, откуда вытекает, что класс гомотопии $\tilde{\gamma}$ корректно определен.

$\gamma \cdot \tilde{\gamma}$ — класс гомотопии пути $u \circ \ell$, где $\ell : [0,1] \to [0,1]$ — функция, заданная формулой $\ell(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1/2, \\ 2-2t, & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$.

Тогда гомотопия $u \circ \ell_s$, где $\ell_s(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (1-s)\ell(t)$, соединяет пути $u \circ \tilde{u}$ и $\epsilon_a \in \mathbf{1}_a$, откуда вытекает, что $\gamma \cdot \tilde{\gamma} = \mathbf{1}_a$; для второго равенства аналогично. $\square$

Фундаментальным группоидом $\Pi_1(X)$ называется категория, объекты которой — точки топологического пространства X; множество морфизмов из точки (объекта) a в точку (объект) b это $P_X(a,b)$ (множество классов гомотопии путей из a в b), а композиция — умножение классов гомотопии путей, описанное выше. Тогда свойства 1 и 2 теоремы 2 означает, что $\Pi_1(X)$ — действительно категория, а свойство 3 — что каждый морфизм в категории $\Pi_1(X)$ обратим. Категории с таким свойством называются *группоидами*.

Для всякого объекта a произвольной категории $\mathbf{C}$ множество морфизмов $\mathrm{Mor}(a,a)$ — полугруппа (множество с ассоциативной операцией и единицей). Если $\mathbf{C}$ — группоид, то $\mathrm{Mor}(a,a)$ — группа (всякий элемент имеет обратный). Для фундаментального группоида пространства X и точки $a \in X$ (объекта категории) группа $\mathrm{Mor}(a,a)$ обозначается $\pi_1(X,a)$ и называется фундаментальной группой.

Множество $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b) = P_X(a,b)$ морфизмов из точки a в точку b, очевидно, непусто тогда и только тогда, когда a и b лежат в одной и той же компоненте линейной связности пространства X.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}^n$; оно линейно связно, так что множество морфизмов $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b)$ обязательно непусто. Пусть $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ — пути из точки $a = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ в точку $b = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, представляющие классы гомотопии $u_0, u_1 \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b)$. Тогда $\gamma_s(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t)$ — гомотопия путей с фиксированными концами, соединяющая γ_0 и γ_1. Следовательно, $u_0 = u_1$, так что каждое множество $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b)$ содержит ровно один элемент. В частности, фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{R}^n, a)$ для всех a тривиальна.

Пример 2. Пусть $X = S^1$, и $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to S^1$ — пути из точки $a = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ в точку $b = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Пусть также $\Gamma_0, \Gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ — поднятия этих путей.

Предположим вначале, что γ_0 и γ_1 гомотопны и соединяются гомотопией путей $g : [0,1]^2 \to S^1$, и пусть $G : [0,1]^2 \to S^1$ — поднятие этой гомотопии. Поскольку g — гомотопия путей с фиксированными концами, $p(G(0,s)) = g(0,s) = a$ ($p : \mathbb{R} \to S^1$ — стандартное экспоненциальное отображение). Тем самым отображение $s \mapsto G(0,s)$ отображает отрезок $[0,1]$ — связное пространство — в дискретное пространство $p^{-1}(a) \subset \mathbb{R}$ и, следовательно, постоянно. Таким образом, $\Gamma_0(0) = G(0,0) = G(0,1) = \Gamma_1(0)$; аналогично, $\Gamma_0(1) = \Gamma_1(1)$.

Обратно, пусть $\Gamma_0(0) = \Gamma_1(0)$ и $\Gamma_0(1) = \Gamma_1(1)$. Положим по определению $G(t,s) = s\Gamma_1(t) + (1-s)\Gamma_0(t)$ и $g(t,s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} p(G(t,s))$. Тогда $G(0,s) = const.$ и $G(1,s) = const.$, откуда $g(0,s) = a$ и $g(1,s) = b$ при всех s. Таким образом, g является гомотопией путей, соедниняющей γ_0 и γ_1.

Напомним, что поднятие отображения $[0,1]^n \to S^1$ не единственно, но любые два поднятия отличаются на целочисленную константу. Таким образом, два пути $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to S^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда для их (произвольных) поднятий Γ_0 и Γ_1 выполнено равенство если $\Gamma_0(1) - \Gamma_0(0) = \Gamma_1(1) - \Gamma_1(0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} x$. Число x принадлежит $\overset{\smile}{ab}/(2\pi) + \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, где $\overset{\smile}{ab}$ — угловая величина дуги окружности, соединяющей a и b.

Пусть теперь $a, b, c \in S^1$, и γ_1 — путь из a в b, а γ_2 — путь из b в c, принадлежащие классам гомотопии $u_1 \in \mathrm{Mor}(a,b)$ и $u_2 \in \mathrm{Mor}(b,c)$ соответственно. Если $\Gamma_1, \Gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ — поднятия путей γ_1 и γ_2, то поднятием пути $\gamma_1 \cdot \gamma_2$, принадлежащего классу $u_1 \cdot u_2 \in \mathrm{Mor}(b,c)$, является отображение

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \Gamma_1(2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ \Gamma_2(2t-1) + (\Gamma_1(1) - \Gamma_2(0)), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

($\Gamma_1(1) - \Gamma_2(0) \in \mathbb{Z}$, поскольку $\gamma_2(0) = b = \gamma_1(1)$). Классам u_1 и u_2 соответствуют числа $x_1 = \Gamma_1(1) - \Gamma_1(0)$ и $x_2 = \Gamma_2(1) - \Gamma_2(0)$, а классу $u_1 \cdot u_2$ — число $\Gamma(1) - \Gamma(0) = x_1 + x_2$.

Тем самым множество морфизмов $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(S^1)}(a,b)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством действительных чисел (арифметической прогрессией) $\overset{\smile}{ab}/(2\pi) + \mathbb{Z}$; при этом композиции морфизмов соответствует сложение действительных чисел.

В частности, элементы фундаментальной группы $\pi_1(S^1, a)$ для любого $a \in S^1$ взаимно однозначно соответствуют целым числам, при этом композиция в группе соответствует сложению целых чисел — иными словами, имеет место изоморфизм групп $\pi_1(S^1, a) \cong \mathbb{Z}$.

2. **Замена отмеченной точки.** Пусть $\mathbf{C}$ — категория, a и b — ее эквивалентные объекты, а $f \in \mathrm{Mor}(a,b)$ — обратимый морфизм. Сопоставим произвольному морфизму $\varphi \in \mathrm{Mor}(a,a)$ морфизм $E_f(\varphi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f \circ \varphi \circ f^{-1} \in \mathrm{Mor}(b,b)$. Отображение $E_f : \mathrm{Mor}(a,a) \to \mathrm{Mor}(b,b)$ является автоморфизмом полугрупп: $E_f(\varphi_1 \circ \varphi_2) = f \circ \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ f^{-1} = f \circ \varphi_1 \circ f^{-1} \circ f \circ \varphi_2 \circ f^{-1} = E_f(\varphi_1) \circ E_f(\varphi_2)$ и $E_f(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_b$ (докажите!); если элемент $\varphi \in \mathrm{Mor}(a,a)$ обратим, то $E_f(\varphi^{-1}) = E_f(\varphi)^{-1}$. Если категория $\mathbf{C}$ — группоид, то $\mathrm{Mor}(a,a)$ и $\mathrm{Mor}(b,b)$ — группы, а E_f

— гомоморфизм групп. Гомоморфизм E_f (групп или полугрупп) всегда обратим: его обратным, как легко проверить, является $E_{f^{-1}} : \mathrm{Mor}(b,b) \to \mathrm{Mor}(a,a)$. Тем самым доказана

Лемма 1. *Полугруппы (или группы) морфизмов* $\mathrm{Mor}(a,a)$ *для эквивалентных объектов категории изоморфны.*

Два объекта группоида эквивалентны, если между ними существует хотя бы один морфизм. В частности, точки $a, b \in X$ — эквивалентные объекты фундаментального группоида $\Pi_1(X)$ тогда и только тогда, когда они лежат в одной компоненте линейной связности пространства X. Из леммы 1 вытекает в этом случае, что фундаментальные группы $\pi_1(X,a)$ и $\pi_1(X,b)$ изоморфны.

Заметим, что изоморфизм $E_f : \mathrm{Mor}(a,a) \to \mathrm{Mor}(b,b)$ существует, но, вообще говоря, не единствен — он зависит от выбора морфизма f, осуществляющего эквивалентность. В частности, если $f \in \mathrm{Mor}(a,a)$ — обратимый морфизм из объекта в себя, то $E_f : \mathrm{Mor}(a,a) \to \mathrm{Mor}(a,a)$ — сопряжение морфизмом f (внутренний автоморфизм): $E_f(\varphi) = f \circ \varphi \circ f^{-1}$.

Замечание мелким шрифтом. Гомоморфизм E_f — частный случай важной конструкции, называемой функтором обмена эквивалентных объектов. Пусть $\mathbf{C}$ — категория, a и b — ее эквивалентные объекты, а $f \in \mathrm{Mor}(a,b)$ — обратимый морфизм. Построим функтор Exch_f из категории $\mathbf{C}$ в себя, переводящий объекты a и b друг в друга и оставляющий все остальные объекты на месте. Для задания Exch_f нужно описать, как он действует на морфизмы.

Введем следующее обозначение: если c — объект категории $\mathbf{C}$, то $\varphi_c \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f, & c = a, \\ f^{-1}, & c = b, \\ \mathrm{id}_c & \text{для остальных } c. \end{cases}$ Морфизм $\varphi_c \in \mathrm{Mor}(c, \mathrm{Exch}_f(c))$ обратим при любом c.

Пусть теперь p, q — произвольные объекты категории $\mathbf{C}$, а $u \in \mathrm{Mor}(p,q)$ — морфизм. Имеем $\varphi_q \in \mathrm{Mor}(q, \mathrm{Exch}_f(q))$, $\varphi_p^{-1} \in \mathrm{Mor}(\mathrm{Exch}_f(p), p)$, так что композиция $\mathrm{Exch}_f(u) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_q \circ u \circ \varphi_p^{-1}$ определена и принадлежит $\mathrm{Mor}(\mathrm{Exch}_f(p), \mathrm{Exch}_f(q))$. Равенства $\mathrm{Exch}_f(u_1 \circ u_2) = \mathrm{Exch}_f(u_1) \circ \mathrm{Exch}_f(u_2)$ и $\mathrm{Exch}_f(\mathrm{id}_p) = \mathrm{id}_{\mathrm{Exch}_f(p)}$ проверяются непосредставленным вычислением.

Как нетрудно видеть, $E_f(\varphi) = \mathrm{Exch}_f(\varphi)$ при $\varphi \in \mathrm{Mor}(a,a)$.

3. Π_1 **как функтор.** Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Сопоставим пути $\gamma : [0,1] \to X$ из точки $a = \gamma(0)$ в точку $b = \gamma(1)$ путь $f \circ \gamma : [0,1] \to Y$ из точки $f(\gamma(0)) = f(a)$ в точку $f(\gamma(1)) = f(b)$. Если путь γ подвергается гомотопии γ_s $(0 \le s \le 1)$ с фиксированными концами, то такую же гомотопию $f \circ \gamma_s$ претерпевает и путь $f \circ \gamma$. Из этого следует, что определено отображение $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b) \to \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(f(a), f(b))$, которое мы обозначим f_*.

Теорема 3. *Соответствие, сопоставляющее каждой точке* $a \in X$ *точку* $f(a) \in Y$*, а каждому классу гомотопии путей* $u \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b)$ *класс гомотопии путей* $f_*(u) \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(Y)}(f(a), f(b))$*, является функтором из категории* $\Pi_1(X)$ *в категорию* $\Pi_1(Y)$*. В частности, его ограничение на множество морфизмов из точки* $a \in X$ *в себя является гомоморфизмом групп* $f_* : \pi_1(X,a) \to \pi_1(Y, f(a))$.

Доказательство. Пусть $u_1 \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b)$, $u_2 \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(b,c)$ — классы, представителями которых являются пути $\gamma_1 : [0,1] \to X$ и $\gamma_2 : [0,1] \to X$, где $\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = b$, $\gamma_2(1) = c$. Тогда $u_1 \cdot u_2 \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,c)$ — класс, представленный путем $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ \gamma_2(2t-1), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$ Очевидно, $f \circ (\gamma_1 \cdot \gamma_2) = (f \circ \gamma_1) \cdot (f \circ \gamma_2)$, откуда и вытекает, что $f_*(u_1 \cdot u_2) = (f_* u_1) \cdot (f_* u_2)$. Равенство $f_*(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{f(a)}$, где id_a — класс гомотопии пути, переводящего весь отрезок $[0,1]$ в точку a, очевидно. Таким образом, построенное соответствие — функтор. □

Пример 3. Пусть $S^1 \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $n \in \mathbb{Z}$, и $f : S^1 \to S^1$ — отображение, заданное равенством $f(z) = z^n$. Для произвольного пути $\gamma : [0,1] \to S^1$ рассмотрим его поднятие $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$. Стандартное экспоненциальное отображение $p : \mathbb{R} \to S^1$ обладает свойством $p(nx) = f(p(x))$ для всякого $x \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что $\Delta(t) \stackrel{\text{def}}{=} n\Gamma(t)$ — поднятие пути $f \circ \gamma$. Как было показано, множество морфизмов $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(S^1)}(a,b)$ находится во взаимно однозначном соответствии с арифметической прогрессией $\overset{\smile}{ab}\ /(2\pi) + \mathbb{Z}$, где классу гомотопии пути γ сопоставляется число $\Gamma(1) - \Gamma(0)$. Отсюда следует, что отображение $f_* : \mathrm{Mor}(a,b) \to \mathrm{Mor}(f(a), f(b))$ — умножение на n. Также гомоморфизм $f_* : \mathbb{Z} = \pi_1(S^1, a) \to \pi_1(S^1, f(a)) = \mathbb{Z}$ — умножение на n.

Назовем категорию $\mathbf{C}$ *малой*, если ее объекты образуют множество. Например, $\Pi_1(X)$ для любого топологического пространства X — малая категория (множество объектов это само X), а категория $\mathbf{Set}$ — нет (не существует множества всех множеств). Пусть $\mathbf{SCat}$ — категория, объекты которой – всевозможные малые категории (сама $\mathbf{SCat}$ малой не является!), а морфизмы из $\mathrm{Mor}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ — функторы из категории $\mathbf{A}$ в категорию $\mathbf{B}$. (Морфизмы между двумя объектами любой категории должны образовывать множество, отсюда и требования, чтобы категории были малыми: функторы из одной малой категории в другую образуют множество, а если категории не малые — нет).

Обозначим построенный выше функтор $\Pi_1(X) \to \Pi_1(Y)$ через f_*.

Теорема 4. *Соответствие* Π_1, *сопоставляющее каждому топологическому пространству* X *фундаментальный группоид* $\Pi_1(X)$, *а каждому непрерывному отображению* $f : X \to Y$ *— функтор* f_* *из* $\Pi_1(X)$ *в* $\Pi_1(Y)$, *является функтором из топологической категории* **Top** *в категорию малых категорий* **SCat**.

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $u \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a, b)$ — класс гомотопии, представителем которого является путь $\gamma : [0, 1] \to X$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. Тогда $(g \circ f)_*(u)$ — класс гомотопии пути $(g \circ f) \circ \gamma = g \circ (f \circ \gamma)$, то есть $g_*(f_*(u))$. Равенство $(\mathrm{id})_* = \mathrm{id}$ очевидно. $\square$