ЛЕКЦИЯ 8

Аннотация. Фундаментальные группоиды гомотопически эквивалентных пространств — эквивалентные категории; в частности, фундаментальные группы таких пространств изоморфны. Накрытия и теорема о накрывающей гомотопии.

1. **Поведение функтора f_* при гомотопии отображений.** Пусть $f_s : X \to Y$ — гомотопия непрерывных отображений ($0 \le s \le 1$). Для всякой точки $c \in X$ рассмотрим путь $\delta_c(s) \stackrel{\text{def}}{=} f_s(c)$ и обозначим $d_c \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(Y)}(f_0(c), f_1(c))$ его класс гомотопии.

Теорема 1. *Для всякого морфизма $u \in \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b)$ имеет место равенство $(f_1)_*(u) = d_a^{-1} \cdot (f_0)_*(u) \cdot d_b$. В частности, гомоморфизмы фундаментальных групп $(f_0)_* : \pi_1(X,a) \to \pi_1(Y, f_1(a))$ и $(f_1)_* : \pi_1(X,a) \to \pi_1(Y, f_1(a))$ отличаются сопряжением: $(f_1)_*(u) = d_a^{-1}(f_0)_*(u)d_a$.*

Доказательство. Пусть $\gamma : [0,1] \to X$ — путь с концами $a = \gamma(0)$ и $a = \gamma(1)$. Для доказательства теоремы нужно показать, что путь $f_1 \circ \gamma$ гомотопен (с фиксированными концами) пути $\tilde{\delta}_a \cdot (f_0 \circ \gamma) \cdot \delta_b$ (напомним, что $\tilde{u}(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(1-t)$).

Пусть $0 \le s, t \le 1$; рассмотрим пути $\mu_s, \nu_s : [0,1] \to Y$, заданные формулами $\mu_s(t) = \delta_a(1-st)$ и $\nu_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_b(1-s+st)$; очевидно, μ_s — путь из $\delta_a(1) = f_1(a)$ в $\delta_a(1-s) = f_{1-s}(a)$, а ν_s — из $\delta_b(1-s) = f_{1-s}(b)$ в $\delta_b(1) = f_1(b)$. Отображение $s \mapsto \mu_s \cdot (f_{1-s} \circ \gamma) \cdot \nu_s$ представляет собой гомотопию путей с концами $f_1(a)$ и $f_1(b)$, соединяющую путь $\delta_a(1) \cdot (f_1 \circ \gamma) \cdot \delta_b(1)$ с путем $\tilde{\delta}_a \cdot (f_0 \cdot \gamma) \cdot \delta_b$. Класс гомотопии первого пути равен $(f_1)_*(u)$, а второго — $d_a^{-1}(f_0)_*(u)d_a$; таким образом, эти классы гомотопии совпадают. □

Функтор F из категории $\mathbf{C}$ в категорию $\mathbf{D}$ называется (слабой) эквивалентностью категорий, если для любых двух объектов a и b категории $\mathbf{C}$ отображение $f_{a,b} : \mathrm{Mor}_C(a,b) \to \mathrm{Mor}_D(f(a), f(b))$ взаимно однозначно и для каждого объекта d категории $\mathbf{D}$ существует объект c категории $\mathbf{C}$ такой, что объект $f(c)$ эквивалентен d.

Пример 1. Если функтор F имеет обратный (т.е. является изоморфизмом категорий), то он является эквивалентностью категорий.

Заметим, что эквивалентность категории не обязательно (обычно не) определяет взаимно однозначное соответствие между объектами категорий.

Теорема 2. *Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ — гомотопическая эквивалентность пространств. Тогда функтор f_* из $\Pi_1(X)$ в $\Pi_1(Y)$ — эквивалентность категорий. В частности, фундаментальные группы гомотопически эквивалентных линейно связных пространств изоморфны.*

Доказательство. $h_1 = g \circ f : X \to X$ гомотопно тождественному отображению $h_0 = \mathrm{id}_X$; пусть h_t — гомотопия между ними. Тогда, согласно теореме 1, отображение

$$g_* \circ f_* = (h_1)_* : \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b) \to \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(h_1(a), h_1(b))$$

переводит каждый морфизм u в $d_a^{-1} \cdot u \cdot d_b$. Поскольку $\Pi_1(X)$ – группоид, это отображение обратимо: $(h_1)_*^{-1}(u) = d_a \cdot u \cdot d_b^{-1}$. Отсюда следует, что отображение $f_* : \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b) \to \mathrm{Mor}_{\Pi_1(Y)}(f(a), f(b))$ инъективно (переводит различные морфизмы в различные), а отображение $g_* : \mathrm{Mor}_{\Pi_1(Y)}(f(a), f(b)) \to \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(h_1(a), h_1(b))$ сюръективно (его образ — все множество $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(h_1(a), h_1(b))$). С другой стороны, $f \circ g$ гомотопно тождественному отображению, откуда так же следует, что $g_* : \mathrm{Mor}_{\Pi_1(Y)}(f(a), f(b)) \to \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(h_1(a), h_1(b))$ инъективно и, следовательно, взаимно однозначно. Из взаимной однозначности $g_* \circ f_*$ вытекает теперь, что и $f_* : \mathrm{Mor}_{\Pi_1(X)}(a,b) \to \mathrm{Mor}_{\Pi_1(Y)}(f(a), f(b))$ взаимно однозначно для любых объектов (точек) a и b.

Два объекта произвольного группоида эквивалентны тогда и только тогда, когда между ними есть хотя бы один морфизм. Следовательно, точки пространства X — эквивалентные объекты фундаментального группоида $\Pi_1(X)$ тогда и только тогда, когда лежат в одной и той же компоненте линейной связности. Для доказательства того, что f_* — эквивалентность категорий, остается заметить, что образ $f(X)$ содержит точки каждой компоненты линейной связности пространства Y (докажите!). □

Пример 2. Если X — стягиваемое пространство (гомотопически эквивалентное точке), то $\pi_1(X,a)$ тривиальна для любой $a \in X$. $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) = \mathbb{Z}$, поскольку это пространство гомотопически эквивалентно окружности.

2. **Накрытия.**

Определение 1. *Накрытием* называется четверка (E, B, p, F), где E и B — топологические пространства (*тотальное пространство* и *база* накрытия соответственно), $p : E \to B$ — непрерывное отображение, а F — дискретное пространство (*стандартный слой*), обладающая следующим свойством: для всякой точки $b \in B$ найдется содержащее ее открытое множество $U \subset B$ (*тривиализующая окрестность*) и непрерывное отображение $\lambda : p^{-1}(U) \to F$ (*тривиализация*) такое, что пара отображений $(p, \lambda) : p^{-1}(U) \to U \times F$ является гомеоморфизмом.

Замечание. Из определения накрытия вытекает, что прообраз $p^{-1}(b) \subset E$ любой точки $b \in B$ гомеоморфен стандартному слою F — в частности, дискретен. Также верно (докажите!), что всякое открытое подмножество тривиализующей окрестности, содержащее точку b, само является тривиализующей окрестностью.

Пример 3. *Тривиальное накрытие* $E = B \times F$, $p : E \to B$ — проекция на первый сомножитель. Здесь можно взять $U = B$, а тривиализация $\lambda : E \to F$ — проекция на второй смножитель.

Пример 4. $E = \mathbb{R}$, $B = S^1$, $p : E \to B$ — стандартное экспоненциальное отображение $p(t) = e^{2\pi it}$, $F = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ (счетное дискретное множество). В этом случае в качестве тривиализующей окрестности $U \subset S^1$ можно взять любую дугу, содержащую b и отличную от всей окружности. Тогда $p^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ — объединение интервалов одинаковой длины $\ell < 1$, отличающихся друг от друга сдвигами на целые числа. Тривиализация $\lambda : p^{-1}(U) \to \mathbb{Z}$ описана в доказательстве леммы о поднятии гомотопии: точке $x \in p^{-1}(U)$ сопоставляется наибольшее целое число, лежащее слева от того интервала, которому принадлежит x. Это отображение постоянно на каждом интервале и, следовательно, непрерывно (это всегда так для тривиализации: λ — непрерывное отображение в дискретное пространство, тем самым оно постоянно на каждой компоненте линейной связности множества $p^{-1}(U)$) .

Пример 5. $E = B = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$, $p : E \to B$ задано формулой $p(z) = z^n$, где $n \neq 0$ — целое число. $F = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta^n = 1\} = p^{-1}(1)$ — конечное множество (из $|n|$ элементов). В качестве тривиализующей окрестности можно взять любую дугу $U \ni b$, не равную всей окружности; тогда $p^{-1}(U) \subset S^1$ — объединение n дуг одинаковой длины (равной $1/n$ от длины дуги U), переходящих друг в друга при повороте на $2\pi/n$ против часовой стрелки. Если $1 \in U$, то каждая дуга содержит один элемент из F; если $1 \notin U$, то элементы F расположены (по одному) между соседними дугами. Тривиализация $\lambda : p^{-1}(U) \to F$ сопоставляет каждой точке x ближайший против часовой стрелки элемент F, лежащий вне дуги, которой принадлежит x. Как и в примере 4, λ постоянна на каждой дуге в $p^{-1}(U)$ и, следовательно, непрерывна.

Пример 6. $E = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — сфера единичного радиуса с центром в начале координат, $B = \mathbb{R}P^n$ — множество прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат. Отображение $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ сопоставляет точке сферы прямую, проходящую через нее и через начало координат. F — дискретное пространство из двух элементов.

В качестве тривиализующей окрестности $U \ni b$ можно взять множество прямых $\ell \subset \mathbb{R}^{n+1}$, образующих с прямой b угол, меньший $\pi/4$. Тогда $p^{-1}(U) \subset S^n$ — объединение $V \sqcup (-V)$ двух компонент линейной связности (переходящих друг в друга при симметрии относительно начала координат), каждая из которых — пересечение S^n и шара в $\mathbb{R}^{n+1}$. Как известно, $\mathbb{R}P^n = S^n/(x \sim -x)$, откуда вытекает, что p непрерывно. Очевидно, $p|_V : V \to U$ взаимно однозначно. Каждая точка $x \in V$ принадлежит компакту $K \subset V$ (например, пересечению S^n и замкнутого шара малого радиуса с центром в x), ограничение $p|_K : K \to p(K) \subset U$ — непрерывная биекция компактов. Следовательно, p^{-1} непрерывно любой точке $y \in p(K)$ — в частности, в точке $p(x)$ — и таким образом непрерывно везде. Иными словами, $p|_V : V \to U$ — гомеоморфизм. В качестве F можно взять дискретное пространство $\{0, 1\}$ из двух точек; тривиализация $\lambda : p^{-1} \to F$ переводит одну из компонент связности (неважно, какую) в 0, а другую в 1.

Пример 7. Отображение $p : [0, 1) \to S^1$, заданное формулой $p(t) = e^{2\pi it}$, не является накрытием, хотя прообраз $p^{-1}(z)$ любой точки $z \in S^1$ дискретен (состоит из одной точки). Действительно, пусть $U \ni 1$ — тривиализующая окрестность. Из замечания после определения 1 вытекает, что без ограничения общности можно считать U дугой окружности. Но тогда прообраз $p^{-1}(U)$ несвязен и, следовательно, не гомеоморфен $U \times * = U$ (где $*$ — пространство из одной точки).

Пример 8. Пусть $B = (-1, 1)$, $E = E_1 \sqcup E_2 \subset \mathbb{R}^2$, где $E_1 = \{(t^2, t) \mid -1 < t < 1\}$ и $E_2 = \{(-t^2, t + 2) \mid -1 < t < 1\}$, $p : E \to B$ — ограничение на E проекции $p(x, y) = x$. Здесь каждая точка $t \in (-1, 1)$ обладает окрестностью U такой, что $p^{-1}(U) = U \times F$, где F — дискретное пространство из двух точек: если $t = 0$, то $U = (-1, 1)$, а если $t \neq 0$, то U — любой интервал, содержащий t и не содержащий 0.

Тем не менее, (E, B, p, F) — не накрытие. Действительно, пусть $U \ni 0$ — тривиализующая окрестность (без ограничения общности, интервал) и $\lambda : p^{-1}(U) \to F = \{0, 1\}$ — тривиализация. Поскольку F дискретно, а λ непрерывно, λ должно быть постоянно на компонентах линейной связности $p^{-1}(U)$, то есть на пересечениях $p^{-1}(U) \cap E_1$ и $p^{-1}(U) \cap E_2$. Поскольку $(p, \lambda) : p^{-1}(U) \to U \times F$ — гомеоморфизм, ограничение p на прообраз $\lambda^{-1}(0) \subset p^{-1}(U)$ должно быть гомеоморфизмом на U (почему?). Но образ при отображении p множества

$p^{-1}(U)\cap E_1$ не содержит точек слева от нуля, а образ при отображении p множества $p^{-1}(U)\cap E_1$ — точек справа от нуля.

Теорема 3 (о накрывающей гомотопии). *Пусть (E,B,p,F) — накрытие, $n\in\mathbb{N}$, $f:[0,1]^n\times[0,1]\to B$ — непрерывное отображение, и $F_0:[0,1]^n\to E$ — непрерывное отображение, для которого $p\circ F_0 = f|_{[0,1]^n\times\{0\}}$. Тогда существует и единственно непрерывное отображение $F:[0,1]^n\times[0,1]\to E$ (поднятие f) такое, что $p\circ F = f$ и $F|_{[0,1]^n\times\{0\}} = F_0$.*

Для накрытия из примера 4 теорема была доказана ранее. Доказательство для произвольного накрытия ничем не отличается — проверьте!

Следствие. *Пусть $a,b\in E$. Отображение $p_*:\mathrm{Mor}_{\Pi_1(E)}(a,b)\to\mathrm{Mor}_{\Pi_1(B)}(p(a),p(b))$ инъективно (переводит различные морфизмы — классы гомотопии путей с фиксированными концами — в различные). В частности, $p_*(\pi_1(E,a))\subset\pi_1(B,p(a))$ — подгруппа $\pi_1(B,p(a))$, изоморфная $\pi_1(E,a)$.*

Доказательство. Пусть $\gamma_0,\gamma_1:[0,1]\to E$ — пути, для которых $\gamma_0(0)=\gamma_1(0)=a$ и $\gamma_0(1)=\gamma_1(1)=b$ такие, что пути $p\circ\gamma_0$ и $p\circ\gamma_1$ гомотопны; нам нужно доказать, что пути γ_0 и γ_1 сами гомотопны.

Пусть $f:[0,1]^2\to B$ — гомотопия с фиксированными концами, соединяющая $p\circ\gamma_0$ и $p\circ\gamma_1$: $f(t,0)=p(\gamma_0(t))$, $f(t,1)=p(\gamma_1(t))$, $f(0,s)=p(a)$ и $f(1,s)=p(b)$ при всех $0\le t,s\le 1$. Согласно теореме о накрывающей гомотопии, существует отображение $F:[0,1]^2\to E$ такое, что $p(F(t,s))=f(t,s)$ и $F(t,0)=\gamma_0(t)$ для всех $0\le t,s\le 1$.

Имеем $p(F(0,s))=p(a)$ для всех s, то есть $F(0,s)\in p^{-1}(p(a))$. Поскольку $p^{-1}(p(a))$ (*слой* накрытия) дискретен, а отрезок $[0,1]$ связен, $F(0,s)=const.=F(0,0)=\gamma_0(0)=a$ для всех s. Аналогично доказываем, что $F(1,s)=b$ для всех s. Но тогда отображение $\varphi(t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}F(t,1)$ — поднятие пути $p\circ\gamma_1$, для которого $\varphi(0)=a=\gamma_1(0)$. Согласно теореме, поднятие пути $p\circ\gamma_1$ с таким свойством единственно, откуда получаем $\varphi=\gamma_1$. Следовательно, F — гомотопия с фиксированными концами, соединяющая пути γ_0 и γ_1. $\square$

Пример 9. Пусть $p:S^1\to S^1$ — накрытие примера 5. Как было доказано в лекции 7, множество морфизмов (классов гомотопии путей) $\mathrm{Mor}_{\Pi_1(S^1)}(z,w)$ естественно сопоставляется множеству вида $\varphi/(2\pi)+\mathbb{Z}$, где φ — аргумент частного $w/z\in S^1$. Композиция морфизмов переходит при этом соответствии в сложение, а отображение $p_*:\mathrm{Mor}_{\Pi_1(S^1)}(z,w)\to\mathrm{Mor}_{\Pi_1(S^1)}(z^n,w^n)$ — в умножение на n. В частности, полагая $z=w=1$, получим, что группа $\pi_1(S^1,1)$ изоморфна $\mathbb{Z}$, а гомоморфизм $p_*:\pi_1(S^1,1)\to\pi_1(S^1,1)$ — умножение на n. При этом p_* — мономорфизм, как и утверждает следствие теоремы 3.