ЛЕКЦИЯ БЕЗ НОМЕРА (НЕ ЧИТАЛАСЬ, ТЕКСТ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ)

Аннотация. Доказательство теоремы о фундаментальной группе клеточного пространства и теоремы о клеточной аппроксимации.

Для произвольного $r \in [0,1]$ рассмотрим отображение $\xi_r : [0,1] \to B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$, заданное формулой $\xi_r(t) = (1-r+r\cos(2\pi t), r\sin(2\pi t))$. В частности, $\xi_r(0) = \xi_r(1) = (1,0)$ для всех r; иными словами, круг представлен как объединение окружностей радиусов $0 \le r \le 1$ (при $r=1$ это граничная окружность), касающихся друг друга в точке $(1,0)$, а больше нигде не пересекающихся.

Пусть X — линейно связное топологическое пространство, $b \in X$, а $\Gamma : B_2 \to X$ — непрерывное отображение, для которого $\Gamma(1,0) = b$. Тогда композиция $\gamma_r \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \circ \xi_r$ представляет собой стягивание петель — гомотопию с фиксированными концами, соединяющую петлю $\gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma\circ\xi_1$ (ограничение Γ на границу круга) с "тривиальной" петлей $\gamma_0(t) \equiv b$. Нетрудно видеть (докажите!), что любое стягивание петель в пространстве X можно получить подобным образом из некоторого непрерывного отображения $\Gamma : B_2 \to X$.

Доказательство теоремы 4 лекции 13. Согласно следствию 2 из лекции 12, группа $\pi_1(X,b)$ изоморфна $\pi_1(\mathrm{sk}_2(X),b)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $X = \mathrm{sk}_2(X)$, т.е. содержит только нульмерные, одномерные и двумерные клетки. Обозначим $\iota \stackrel{\text{def}}{=} \iota_1 : \mathrm{sk}_1(X) \to X$ (тавтологическое вложение).

Пусть $\alpha \in I_2$ (т.е. $s_\alpha^{(2)}$ — двумерная клетка). Отображение $\chi_\alpha^{(2)}\Big|_{\partial B_2} : S^1 \to X$ продолжается до непрерывного отображения $\chi_\alpha^{(2)} : B_2 \to X$. Тем самым петля $\chi_\alpha^{(2)} \circ \xi_1 : [0,1] \to X$ стягиваема. Отсюда вытекает, что все элементы определенного в теореме класса сопряженности $u_\alpha \subset \pi_1(\mathrm{sk}_1(X),b)$ переходят в 1 при отображении $(\iota_1)_* : \pi_1(\mathrm{sk}_1(X),b) \to \pi_1(X,b)$. Это означает, что $H \subset \mathrm{Ker}(\iota_*)$ (напомним, что H порождена u_α при всевозможных $\alpha \in I_2$).

Обратно, пусть $u \in \mathrm{Ker}(\iota_1)_*$, и пусть $\gamma : [0,1] \to \mathrm{sk}_1(X)$ — петля, представляющая класс u; $\gamma(0) = \gamma(1) = b$. Петля γ стягивается (в X) в точку b с неподвижными концами. Следоветельно, существует непрерывное отображение $\Gamma : B_2 \to X$ такое, что $\Gamma \circ \xi_1 = \gamma$.

Отождествим каждую клетку $e_\alpha^{(2)}$ с открытым кругом радиуса 1 с помощью характеристического отображения $\chi_\alpha^{(2)}$. В каждой клетке $e_\alpha^{(2)}$ после этого отождествления рассмотрим концентрические круги $\Omega_{1,\alpha} \subset \dots \subset \Omega_{4,\alpha}$ радиусов $1/5, \dots, 4/5$ соответственно. Триангулируем теперь круг B_2 достаточно мелко, т.е. разобьем его на конечное число (криволинейных) треугольников $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ таких, что диаметр множества $\Gamma(\Delta_i) \subset e_\alpha^{(2)}$ при всяком i меньше $1/5$ (почему это возможно?). Тем самым, если множество $\Gamma(\Delta_i)$ пересекается к кругом $\Omega_{4,\alpha}$, то оно целиком лежит в клетке $e_\alpha^{(2)}$ и не пересекается с $\mathrm{sk}_1(X)$.

Обозначим теперь $K \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup\{\Delta_i \subset B_2 \mid \exists\alpha\, \Gamma(\Delta_i) \cap \Omega_{4,\alpha} \neq \varnothing\} \subset B_2$; индекс α для каждого $\Delta_i \subset K$ единственный, поскольку круги $\Omega_{4,\alpha} \subset e_\alpha^{(2)}$ при разных α не пересекаются. Пусть $\Gamma' : K \to X$ — непрерывное кусочно-линейное отображение, совпадающее с Γ в вершинах треугольников Δ_i (B_2 и $e_\alpha^{(2)}$ — подмножества $\mathbb{R}^2$, так что понятие кусочно-линейного отображения имеет смысл).

Определим гомотопию $\Gamma_t : K \to X$ формулой $\Gamma_t \stackrel{\text{def}}{=} t\Gamma' + (1-t)\Gamma$ (это имеет смысл по той же причине, что и кусочная линейность Γ': и образ, и прообраз вложены в $\mathbb{R}^2$), и рассмотрим отображение $\Gamma'' : B_2 \to X$, заданное на каждом треугольнике Δ_i формулой

$$\Gamma''(x) = \begin{cases} \Gamma'(x), & \Gamma(x) \in \Omega_{2,\alpha}, \\ \Gamma_{3-5|\Gamma(x)|}(x), & \Gamma(x) \in \Omega_{3,\alpha} \setminus \Omega_{2,\alpha}, \\ \Gamma(x), & \Gamma(x) \subset e_\alpha^{(2)} \setminus \Omega_{3,\alpha}. \end{cases}$$

Очевидно, Γ'' непрерывно и совпадает с Γ (то есть с γ) на границе круга B_2. Тем самым Γ'' это также стягивание петли γ в точку; в дальнейшем будем для простоты обозначать его Γ.

Обозначим $\delta_\alpha \subset \Omega_{1,\alpha}$ круг, целиком лежащий в $\Gamma(\Delta_i)$ при некотором i (т.е. не пересекающийся с образами ребер и вершин триангуляции Δ круга B_2). Пусть теперь $R_{\alpha,t} : e_\alpha^{(2)} \to e_\alpha^{(2)}$ — гомотопия, "раздувающая" круг δ_α на всю $e_\alpha^{(2)}$ и линейная (точнее, аффинная) на этом круге. Иными словами, $R_{\alpha,0} = \mathrm{id}$, $R_{\alpha,t}(x) = x$ для всех $x \in \partial e_\alpha^{(2)}$, а $R_{\alpha,1}$ — аффинное преобразование, для которого $R_{\alpha,1}(\delta_\alpha) = e_\alpha^{(2)}$. Для произвольного $x \in B_2$ пусть α таков, что $\Gamma(x) \in e_\alpha^{(2)}$; если $\Gamma(x) \notin \mathrm{sk}_1(X)$, то такой индекс $\alpha \in I_2$ существует и единствен. Положим по определению $\Psi_t(x) = R_{\alpha,t}(\Gamma(x))$; если же $\Gamma(x) \in \mathrm{sk}_1(X)$, то $\Psi_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} x$ — очевидно, это не нарушает непрерывности (поскольку гомотопии $R_{\alpha,t}$ неподвижны на границах кругов). Тем самым отображение Ψ_1 совпадает с Γ (и тем самым с γ) на границе B_2 и представляет собой, как и Γ, стягивание кривой γ в точку.

Прообраз $\Gamma^{-1}(e_\alpha^{(2)}) \subset \Delta_i \subset B_2$ это прообраз круга δ_α при аффинном отображении, т.е. область $E_\alpha \subset B_2 \subset \mathbb{R}^2$, ограниченная эллипсом. Тогда $\Psi_1(E_\alpha) = e_\alpha^{(2)}$, и $\Psi_1(x) \in \mathrm{sk}_1(X)$, если $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$. С этого момента будем обозначать Ψ_1 опять символом Γ.

Отображение Γ переводит весь круг B_2, кроме объединения непересекающихся эллиптических областей $E_1, \dots, E_N$, в $\mathrm{sk}_1(X)$, на границе круга совпадает с γ, а на границе каждой области E_α совпадает с $\chi_\alpha^{(2)}\Big|_{\partial B_2}$. Соединим отмеченную точку $b \in \partial B_2$ системой непересекающихся путей $s_1 \dots, s_N$ с границами областей $E_1, \dots, E_N$. Граница круга B_2 гомотопна, в $B_2 \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_N)$, кривой $(s_1 \cdot \tau_1 \cdot s_1^{-1}) \cdot \dots \cdot (s_N \cdot \tau_N \cdot s_N^{-1})$, где τ_i — обход границы области E_i (эллипса) против часовой стрелки. Композиция Γ с путем τ_α равна $\chi_\alpha^{(2)} \circ \xi_1$, откуда вытекает, что γ гомотопна (как петля в $\mathrm{sk}_1(X)$) произведению петель вида $(\Gamma \circ s_\alpha) \cdot \chi_\alpha^{(2)} \cdot (\Gamma \circ s_\alpha)^{-1}$, классы гомотопии которых принадлежат нормальной подгруппе, порожденной всеми u_α, то есть подгруппе H. □

Для доказательства теоремы о клеточной аппроксимации нам потребуется вспомогательное утверждение:

Лемма 1 (лемма Борсука)**.** *Пусть X — клеточное пространство, Y — произвольное топологическое пространство, $Z \subset X$ — клеточное подпространство. Пусть задана гомотопия $\Phi : Z \times [0,1] \to Y$ и отображение $\Psi_0 : X \to Y$ такое, что $\Psi_0(z) = \Phi(z, 0)$ для любого $z \in Z$. Тогда существует гомотопия $\Psi : X \times [0,1] \to Y$ такая, что $\Psi(x, 0) = \Psi_0(x)$ при всех $x \in X$ и $\Phi(z,t) = \Psi(z,t)$ для всех $z \in Z$, $t \in [0,1]$.*

Иными словами, если есть гомотопия отображений клеточного подпространства и продолжение на все пространство ее начального члена, то на пространство можно продолжить всю гомотопию.

Доказательство. Зафиксируем клетку $e_\alpha^{(k)}$ пространства X и предположим, что гомотопия Ψ уже задана на всех клетках подпространства Z и на всех клетках $e_\beta^{(i)}$ пространства X размерности $i < k$. Тем самым $\Psi(x,t)$ определена при всех$x \in \partial e_\alpha^{(k)}$ и произвольном t, а также при всех x и $t = 0$. Отождествляя $e_\alpha^{(k)}$ с $\mathrm{int}\, B_k$, получим задачу продолжения отображения Ψ на $B_k \times [0,1]$ при условии, что оно задано на $C_k \stackrel{\text{def}}{=} \partial B_k \times [0,1] \cup B_k \times \{0\}$ — стенках и дне цилиндра.

Множество C_k — ретракт $B_k \times [0,1]$, то есть существует непрерывное отображение (ретракция) $f : B_k \times [0,1] \to C_k$ такое, что $f(s) = s$ при всех $s \in C_k \subset B_k$ (например, можно вложить $B_k \times [0,1] \subset \mathbb{R}^{k+1}$ и взять в качестве f проекцию из точки $(a, 1+\varepsilon)$, где a — центр шара B_k, а $\varepsilon > 0$ произвольно). Отображение $(b,t) \mapsto \Psi(f(b,t))$ является искомым продолжением.

Тем самым существует продолжение гомотопии Ψ в произвольную клетку, если во все клетки меньшей размерности гомотопия уже продолжена. При этом продолжение можно делать одновременно для всех клеток данной размерности (почему при этом не нарушается непрерывность?). Таким образом получим для каждого n непрерывное отображение $\Psi_n : \mathrm{sk}_n(X) \times [0,1] \to Y$, продолжающее гомотопию Φ и отображение Ψ_0, причем эти продолжения согласованы: $\Psi_n|_{\mathrm{sk}_{n-1}(X) \times [0,1]} = \Psi_{n-1}$. Это дает отображение $\Psi : X \times [0,1] \to Y$, непрерывность которого вытекает из определения клеточной топологии (непрерывность на каждом остове влечет непрерывность на всем пространстве). □

Доказательство теоремы о клеточной аппроксимации. Рассмотри клетку $e_\alpha^{(k)}$ в X и предположим, что отображение f уже клеточное на Z и на всех клетках размерности меньше k. Поскольку множество (замыкание клетки) $\overline{e_\alpha^{(k)}}$ замкнуто и пересекается с конечным числом клеток, оно компактно; тогда образ $f(\overline{e_\alpha^{(k)}})$ также компактен, откуда вытекает, что $f(e_\alpha^{(k)})$ пересекается с конечным числом клеток в Y.

Пусть $e_\beta^{(m)} \cap f(e_\alpha^{(k)}) \neq \varnothing$ и $m > k$ (если таких клеток нет, то отображение f уже клеточно на клетке $e_\alpha^{(k)}$). Отождествим клетку $e_\beta^{(m)}$ с шаром $B_m \subset \mathbb{R}^m$ радиуса 1 посредством характеристического отображения $\chi_\beta^{(m)}$ и подвергнем на нем отображение f гомотопии, аналогичной гомотопии Γ'_t из доказательства теоремы 4 лекции 13 выше. После гомотопии отображение f на шаре $B_{1,m} \subset B_m \subset \mathbb{R}^m$ радиуса $1/5$ совпадает с кусочно-линейным отображением $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, а поскольку $k < m$, его образ не совпадает со всем B_m (докажите!).

Пусть теперь $y \in B_m \setminus f(e_\alpha^{(k)})$, и пусть $\Phi : B_m \setminus \{y\} \to \partial B_m$ — проекция шара без точки y на сферу из той же точки y. Композиция $\tilde f \stackrel{\text{def}}{=} \Phi \circ f$ гомотопна f; образ $\tilde f(e_\alpha^{(k)})$ пересекается с теми же клетками размерности, большей k, что и $f(e_\alpha^{(k)})$, за исключением $e_\beta^{(m)}$. Повторяя эту процедуру конечное количество раз, построим отображение, гомотопное f и такое, что образ e_α с клетками размерности $m > k$ вообще не пересекается, т.е. лежит в $\mathrm{sk}_k(Y)$. Эту гомотопию можно проделать для всех клеток размерности k одновременно и продолжить затем на все пространство X по лемме Борсука.

Таким образом, если f клеточное на $\mathrm{sk}_{k-1}(X)$, то его можно сделать клеточным на $\mathrm{sk}_k(X)$, подвергнув гомотопии, неподвижной на Z и на $\mathrm{sk}_{k-1}(X)$. Рассуждая так же, как в доказательстве леммы Борсука, получим, что тем самым построена неподвижная на Z гомотопия f и отображения, клеточного на всем X. $\square$