3. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА.

Задача 1. Докажите, что S^n без одной точки гомеоморфно $\mathbb{R}^n$.

Задача 2. Докажите, что S^1 гомеоморфна а) фактору отрезка $[0,1]$ по склейке концов $0 \sim 1$; б) фактору прямой $\mathbb{R}$ по прибавлению целых чисел: $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, то есть $\mathbb{R}/\sim$, где $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

Задача 3. а) Выведите из задачи 2, что двумерный тор $S^1 \times S^1$ гомеоморфен квадрату $[0,1]^2$, стороны которого склеены так: $(x,0) \sim (x,1)$, $(0,y) \sim (1,y)$ для всех $0 \le x, y \le 1$, а также фактору $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Сформулируйте и докажите аналоги этих утверждений для n-мерного тора $(S^1)^n$. б) Пусть $H = A_1 \dots A_6$ — правильный шестиугольник (с внутренностью) на плоскости, и f_1, f_2, f_3 — параллельные переносы, переводящие стороны A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 в противоположные. Докажите, что фактор (результат склейки сторон) $H/(u_1 \sim f_1(u_1), u_2 \sim f_2(u_2), u_3 \sim f_3(u_3))$, где u_1, u_2, u_3 — все точки соответствующих сторон, гомеоморфен двумерному тору. в) Докажите, что тор гомеоморфен поверхности бублика в $\mathbb{R}^3$; нарисуйте на поверхности бублика граф — склеенные стороны шестиугольника из задачи 3б.

Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ определяется как фактор $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ по такому отношению эквивалентности: $u \sim v$, если существует число $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такое, что $u = tv$. В этом определении можно заменить поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел полем $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ как топологическое пространство).

Задача 4. а) Докажите, что это действительно отношение эквивалентности. б) Хаусдорфово ли пространство $\mathbb{R}P^n$? а $\mathbb{C}P^n$? в) Докажите, что $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфно фактору сферы $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ по отношению эквивалентности $u \sim v \Leftrightarrow u = -v$. г) Докажите, что $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфно фактору шара $B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \le 1\}$ по отношению эквивалентности $u \sim v \Leftrightarrow |u| = |v| = 1, u = -v$.

Задача 5. а) Докажите, что $\mathbb{R}P^1$ (множество прямых на плоскости, проходящих через начало координат) гомеоморфно окружности S^1. б) Докажите, что $\mathbb{C}P^1$ (множество комплексных прямых в $\mathbb{C}^2$, проходящих через начало координат) гомеоморфно двумерной сфере S^2.

Лентой Мебиуса называется факторпространство $\mathcal{M}$ квадрата $[0,1]^2$ по склейке двух его сторон: $(0,y) \sim (1, 1-y)$ при $0 \le y \le 1$.

Задача 6. а) Докажите, что край ленты Мебиуса (объединение сторон $\{(x,0) \mid x \in [0,1]\}$ и $\{(x,1) \mid x \in [0,1]\}$ квадрата) гомеоморфен окружности. б) Докажите, что $\mathbb{R}P^2$ гомеоморфна квадрату $[0,1]^2$, в котором склеены точки $(0,y) \sim (1,1-y)$ для всех $0 \le y \le 1$ и точки $(x,0) \sim (1-x,1)$ для всех $0 \le x \le 1$. в) Пусть $L \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 1/3 \le y \le 2/3\} \subset [0,1]^2$. Докажите, что если $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}P^2$ — отображение склейки из пункта 6б, то $f(L)$ гомеоморфен ленте Мебиуса, а образ дополнения $f([0,1]^2 \setminus L$ гомеоморфен кругу. Тем самым (уточните!) проективная плоскость гомеоморфна склейке по границе круга и ленты Мебиуса.

Бутылкой Клейна называется фактор квадрата $[0,1]^2$ по отождествлению его сторон $(x,0) \sim (x,1)$, $(0,y) \sim (1,1-y)$ для всех $0 \le x, y \le 1$.

Задача 7. Докажите, что бутылка Клейна гомеоморфна а) объединению двух лент Мебиуса, склеенных по границе; б) цилиндру $S^1 \times [0,1]$, основания которого склеены так: $((x,y),0) \sim ((x,-y),1)$ для всех $(x,y) \in S^1$. в) Проделаем в бутылке Клейна маленькую круглую дырку $(\{(x,y) \in K \mid (x-1/2)^2 + (y-1/2)^2 \le 1/9\})$ и склеим ее границу с границей ленты Мебиуса. Докажите, что полученное пространство гомеоморфно тору $\mathbb{T}^2$, в котором проделана такая же круглая дырка, граница которой склеена с границей ленты Мебиуса.

Пусть $P_g \subset \mathbb{R}^2$ — правильный $4g$-угольник с вершинами $A_0, \dots, A_{4g-1}$ (нумерация против часовой стрелки). Пусть p_i, q_i — повороты плоскости (при $g = 1$ — параллельные переносы), для которых $p_i(A_{4i}) = A_{4i+3}$, $p_i(A_{4i+1}) = A_{4i+2}$, $q_i(A_{4i+1}) = A_{4i+4}$, $q_i(A_{4i+2}) = A_{4i+3}$; здесь $0 \le i \le g-1$. Отождестим для всякого i каждую точку $u \in [A_{4i}, A_{4i+1}]$ с ее образом $p_i(u) \in [A_{4i+2}, A_{4i+3}]$, а каждую точку $u \in [A_{4i+1}, A_{4i+2}]$ с ее образом $q_i(u) \in [A_{4i+3}, A_{4i+4}]$ (это называется "склеить (соответствующие) стороны многоугольника без перекрутки"). Результат отождествления называется сферой с g ручками. В частности, сфера с 1 ручкой это тор $S^1 \times S^1$ (см. задачу 3).

Задача 8. а) Докажите, что сфера с g ручками гомеоморфна сфере с $g-1$ ручками и дыркой, к которой приклеена по границе ручка — тор с дыркой. б*) Разобьем стороны $4g$-угольника на пары $(e_i, e_{\sigma(i)}$, и пусть f_i — поворот или параллельный перенос плоскости, переводящий e_i в $e_{\sigma(i)}$ без перекрутки. Отождествим каждую точку $u \in e_i$ с ее образом $f_i(u) \in e_{\sigma(i)}$ (для всех i). Докажите, что полученное топологическое пространство гомеоморфно сфере с $h \le g$ ручками (для некоторого h, зависящего от того, какие пары сторон склеиваются).

Задача 9. а) Докажите, что каждое из множеств $A = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1,\ |z| \leq |w|\}$ и $B = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1,\ |z| \geq |w|\}$ гомеоморфно полноторию, то есть произведению $S^1 \times B_2$ окружности на круг. б) Докажите, что пересечение $A \cap B$ гомеоморфно двумерному тору, а объединение $A \cup B$ — трехмерной сфере $S^3 = \{(p,q,r,s) \in \mathbb{R}^4 \mid p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = 1\}$. в) Докажите, что дополнение в $\mathbb{R}^3$ к стандартно вложенному полноторию (бублику из теста) гомеоморфно полноторию без одной точки.

Указание (к пункту 9в)**.** Воспользуйтесь задачей 1 при $n = 3$.

Задача 10. а) Докажите, что множество прямых на плоскости гомеоморфно ленте Мебиуса без границы. (Уточните, как именно определяется топология в множестве прямых!) Куда переходит при построенном гомеоморфизме множество прямых, проходящих через начало координат? через произвольную фиксированную точку плоскости? множество прямых, параллельных оси абсцисс? множество прямых, пересекающих единичный круг с центром в начале координат? б) Докажите, что множество проективных прямых на проективной плоскости гомеоморфно проективной плоскости. Куда переходит при этом гомеоморфизме множество прямых, проходящих через заданную точку? множество прямых, касающихся заданной окружности?

Задача 11. а) Докажите, что фактор плоскости $\mathbb{R}^2$ по отождествлению точек $(x,y) \sim (y,x)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$, гомеоморфен полуплоскости (с границей). б) Докажите, что фактор плоскости $\mathbb{R}^2$ по отождествлению точек $(x,y) \sim (-x,-y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$, гомеоморфен $\mathbb{R}^2$. в) Докажите, что фактор комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$ по отождествлению точек $(x,y) \sim (y,x)$ для всех $x, y \in \mathbb{C}$ гомеоморфен $\mathbb{C}^2$. г) Докажите, что фактор пространства $\mathbb{C}^n$ по отождествлению наборов $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, отличающихся перестановкой координат, гомеоморфен $\mathbb{C}^n$.

Задача 12. а) Докажите, что двумерный тор $S^1 \times S^1$, в котором склеены точки $(x,y) \sim (y,x)$ для всех $x, y \in S^1$, гомеоморфен ленте Мебиуса. б) Докажите, что пространство $S^2 \times S^2$, в котором склеены точки $(x,y) \sim (y,x)$ для всех $x, y \in S^2$, гомеоморфно $\mathbb{C}P^2$. в) Докажите, что пространство $(S^2)^n$, в котором склеены наборы $(x_1, \ldots, x_n)$, отличающиеся перестановкой точек $x_1, \ldots, x_n \in S^2$, гомеоморфно комплексному проективному пространству $\mathbb{C}P^n$. г*) Докажите, что пространство $(\mathbb{T}^2)^n$, где $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ — двумерный тор, в котором склеены наборы $(x_1, \ldots, x_n)$, отличающиеся перестановкой точек $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{T}^2$, гомеоморфно $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}P^{n-1}$.

Указание. К пункту 12а: см. задачу 10а. К пункту 12б: см. задачи 4б и 11в. К пункту 12в: см. задачи 4б и 11г.