4. ОТОБРАЖЕНИЯ ИЗ ОКРУЖНОСТИ В ОКРУЖНОСТЬ.

Если не сказано иное, то окружность S^1 понимается как $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Задача 1. Пусть $f, g : S^1 \to S^1$ — непрерывные отображения. Докажите, что а) $\deg(f \circ g) = \deg f \deg g$ (справа — умножение целых чисел), б) $\deg(fg) = \deg f + \deg g$ (слева — поточечное умножение комплекснозначых функций: $(fg)(z) = f(z)g(z)$, $z \in S^1$).

Задача 2. а) Докажите, что не существует непрерывной функции $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такой, что $(w(z))^2 = z$ для всех $z \in \mathbb{C}$. б) Докажите, что не существует непрерывной функции $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ такой, что $\exp f(z) = z$ для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Задача 3. а) Пусть $f : S^1 \to S^1$ — непрерывное отображение. Докажите, что для всякой точки $a \in S^1$ прообраз $f^{-1}(a)$ содержит по крайней мере $|\deg f|$ точек (в частности, $f(S^1) = S^1$, если $\deg f \neq 0$). б) в) Пусть $f, g : S^1 \to S^1$ — непрерывные отображения, $\deg(f) \neq \deg(g)$. Докажите, что существует точка $a \in S^1$ такая, что $f(a) = g(a)$. Как можно оценить снизу количество таких точек через $\deg f$ и $\deg g$?

Задача 4. а) Докажите, что всякое непрерывное отображение $f : S^1 \to S^n$, где $n > 1$, гомотопно отображению, образ которого не совпадает с S^n. б) Докажите, что всякое непрерывное отображение $f : S^1 \to S^n$ гомотопно отображению, образ которого — точка. Выведите отсюда, что все непрерывные отображения $f : S^1 \to S^n$, где $n > 1$, гомотопны друг другу.

Задача 5. а) Докажите, что каждое непрерывное отображение $f : S^n \to S^1$, где $n > 1$, гомотопно отображению в точку. б) Тот же вопрос про непрерывное отображение $f : \mathbb{R}P^n \to S^1$.

Задача 6. Букетом k окружностей называется фактор дизъюнктного объединения k окружностей с отмеченными точками (по одной в каждой) по отождествлению отмеченных точек. Запись: $V_k = \bigvee_{i=1}^k S_i^1$. Обозначим $f_i : S^1 \to V_k$ гомеоморфизм окружности на i-ю окружность букета, а $g : V_k \to S^1$ — отображение, ограничение которого на i-ю окружность — гомеоморфизм, переводящий отмеченную точку (верщину букета) в $1 \in S^1$, а все остальные окружности переходят в точку 1. а) Вычислите $\deg g_i \circ f_j$ (это отображение $S^1 \to S^1$). б) Докажите, что отображения f_j и g_i не гомотопны отображениям в точку. в) Докажите, что V_k при $k \neq 1$ гомотопически не эквивалентен окружности. г) Докажите, что V_k и V_ℓ при $k \neq \ell$ гомотопически не эквивалентны. д) Докажите, что сфера с $g > 0$ ручками без одной точки гомотопически эквивалентна букету $2g$ окружностей. Выведите отсюда, что сферы с g ручками при разных g не гомеоморфны.

Задача 7. Пусть $f(z) = (z - \lambda_1)^{m_1} \dots (z - \lambda_s)^{m_s}$ — рациональная функция комплексного переменного; здесь $\lambda_i \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, k$, — нули (при $m_i > 0$) и полюса (при $m_i < 0$) функции, а $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$ — их порядки. а) Пусть $\omega_i \subset \mathbb{C}$ — окружность с центром λ_i, не содержащая внутри себя других λ_j. Пусть $\Phi_i : \omega_i \to S^1$ — отображение, заданное равенством $\Phi_i(z) = f(z)/|f(z)|$. Докажите, что $\deg \Phi_i = m_i$. б) Пусть $\omega \subset \mathbb{C}$ — произвольная окружность, не проходящая через точки $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, а $\Phi : \omega \to S^1$ — отображение, заданное той же формулой, что и в пункте 7а. Найдите $\deg \Phi$.