6. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ГОМОМОРФИЗМ F_*.

Задача 1. а) Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ открыто и линейно связно, $a \in U$. Докажите, что $V \stackrel{\text{def}}{=} U \setminus \{a\}$ линейно связно, а группа $\pi_1(V, b)$ бесконечна для всякого $b \in V$. б) Докажите, что при гомеоморфизме круга (с границей) в себя точки границы переходят в точки границы. в) Докажите, что цилиндр $S^1 \times [0,1]$ и лента Мебиуса не гомеоморфны. Являются ли они гомотопически эквивалентными?

Указание. В лекции 7 было доказано, что плоскость $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфна (хотя гомотопически эквивалентна) замкнутой полуплоскости $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

Задача 2. Докажите, что лента Мебиуса $\mathcal{M}$ гомотопически эквивалентна окружности, а ее край $\partial\mathcal{M}$ гомеоморфен окружности. Пусть $\iota : \partial\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — тавтологическое вложение (каждой точке границы сопоставляется она сама, но уже как точка ленты Мебиуса). Опишите гомоморфизм $\iota_* : \pi_1(\partial\mathcal{M}, a) \to \pi_1(\mathcal{M}, a)$, где a — произвольная точка границы.

Конечным графом называется топологическое пространство, полученное склеиванием конечного числа отрезков (называемых ребрами графа) по какому-нибудь отождествлению их концов (точки, полученные при отождествлении, называются вершинами). Ребро графа называется петлей, если его концы отождествены (являются одной и той же вершиной).

Задача 3. а) Пусть e — ребро конечного графа G, не являющееся петлей, а G/e — топологическое пространство, полученное стягиванием в точку ребра e. Докажите, что G/e гомеоморфно конечному графу. Как связаны количества вершин и ребер у G и G/e? б) Докажите, что G/e гомотопически эквивалентно G. в) Докажите, что конечный граф линейно связен тогда и только тогда, когда для любых двух его вершин a и b существует последовательность ребер $e_1, \dots, e_k$ такая, что для любого $i = 1, \dots, k$ концы ребра e_i — вершины c_i и c_{i+1}, при этом $c_1 = a$ и $c_{k+1} = b$. г) Докажите, что линейно связный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей. Как связаны друг с другом количество этих окружностей, количество вершин и количество ребер графа?