7. НАКРЫТИЯ.

Задача 1. Накрытие $p : E \to B$ с линейно связной базой B называется нормальным, если подгруппа $p_*(\pi_1(E, b)) \subset \pi_1(B, p(b))$ нормальна ($b \in E$ — произвольная точка). Докажите, что накрытие *не* нормально тогда и только тогда, когда существуют петля $\gamma : [0, 1] \to E$, $\gamma(0) = \gamma(1) = b$ и незамкнутый путь $\delta : [0, 1] \to E$, $\delta(0) \neq \delta(1)$ такие, что $p \circ \delta = p \circ \gamma$.

Действием группы G на множестве X называется гомоморфизм A группы G в группу биекций множества X в себя. Иными словами, для каждого $g \in G$ определено отображение $A(g) : X \to X$, причем $A(gh) = A(h) \circ A(g)$, откуда вытекает, что $A(e) = \mathrm{id}_X$ и $A(g^{-1}) = A(g)^{-1}$. Действие A группы G на топологическом пространстве называется *точно дискретным*, если для каждой точки $a \in X$ существует открытое множество $U \subset X$, $a \in U$, такое что множества U и $A(g)(U)$ пересекаются только при $g = e$ (когда они, разумеется, совпадают).

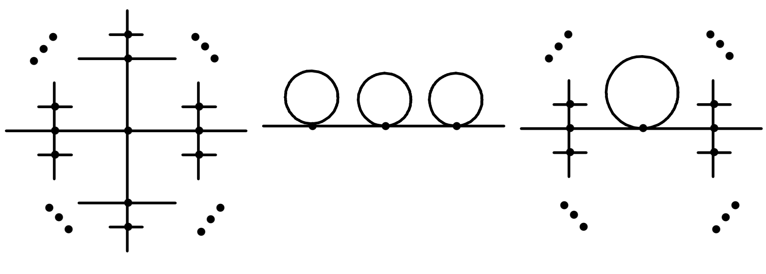
Задача 2. а) Докажите, что действие группы $\mathbb{Z}$ на $X = \mathbb{R}$, при котором $A(n)(t) = t + n$ (где $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$), точно дискретно. Обобщите это утверждение на случай действия группы $G = \mathbb{Z}^k$ на пространстве $X = \mathbb{R}^k$: $A(n)(x) = x + n$; здесь $n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k$, а $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. б) Докажите, что действие группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, -1\}$ на сфере S^n, при котором $A(g)(x) = gx$ (умножение вектора $x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ на число $g = \pm 1$), точно дискретно. в) Назовем точки $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ эквивалентными, если существуют $k, \ell \in \mathbb{Z}$ такие, что $x' = x + k$, $y' = (-1)^k y + \ell$. Опишите группу G и ее точно дискретное действие на $\mathbb{R}^2$ такое, что каждый класс эквивалентности по описанному отношению является орбитой.

Задача 3. а) Пусть A — точно дискретное действие группы G на линейно связном топологическом пространстве E, и пусть $B = X/A$ — пространство орбит этого действия (с фактор-топологией). Докажите, что отображение $p : E \to B$, сопоставляющее каждому элементу $a \in E$ его орбиту, является нормальным накрытием, слой которого — группа G (с дискретной топологией). б) Докажите, что фактор $\pi_1(B, p(b))/p_*(\pi_1(E, b))$ (для произвольной точки $b \in E$) изоморфен группе G. в) Обратное утверждение: пусть $p : E \to B$ — нормальное накрытие с линейно связным E. Постройте точно дискретное действие группы $\pi_1(B, p(b))/p_*(\pi_1(E, b))$ на E такое, что существует гомеоморфизм $f : B \to E/A$, для которого композиция $f \circ p : E \to E/A$ — отображение, сопоставляющее каждому элементу $a \in E$ его орбиту.

Указание. Коротко говоря, утверждение задачи 3а означает, что накрытие, порожденное (точно дискретным) действием группы, нормально. Утверждение задачи 3в — обратное: любое нормальное накрытие порождается точно дискретным действием группы. Утверждение задачи 3б показывает, как эта группа связана с топологией накрытия.

Задача 4. а) Докажите, что фактор $\mathbb{R}^2$ по отношению эквивалентности из задачи 2в гомеоморфен бутылке Клейна. б) Докажите, что фундаментальная группа бутылки Клейна изоморфна группе с двумя образующими a, b и соотношением $aba = b$. в) Пусть $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ — двумерный тор, а отображение $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ задано формулой $f(x, y) = (-x, y + 1/2)$. Докажите, что фактор-пространство $K = \mathbb{T}^2/\big((x, y) \sim f(x, y) \,\forall (x, y) \in \mathbb{T}^2\big)$ гомеоморфно бутылке Клейна, а стандартное отображение (проекция) $p : \mathbb{T}^2 \to K$ — двулистное накрытие. г) Опишите подгруппу $p_*(\pi_1(\mathbb{T}^2)) \subset \pi_1(K)$; убедитесь, что она действительно изоморфна $\mathbb{Z}^2 = \pi_1(\mathbb{T}^2)$ и имеет индекс 2.

Напомним, что граф — результат склейки некоторого (не обязательно конечного) множества отрезков по какому-нибудь отождествлению их концов. Граф называется локально конечным, если валентность каждой



a b c

Рис. 1. Накрытия над букетом двух окружностей его вершины конечна, т.е. каждый класс эквивалентности при склейке содержит конечное число элементов (концов отрезков).

Задача 5. Докажите, что подмножество $X \subset \Gamma$ локально конечного графа G компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и лежит в объединении конечного множества ребер.

Задача 6. а) Докажите, что граф Γ_a, изображенный на рис. 1a (бесконечное дерево), односвязен. б) Постройте накрытие $p_a : \Gamma_a \to S^1 \vee S^1$ над букетом из двух окружностей. Докажите, используя результат задачи 6a, что $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ — свободная группа $\mathcal{F}_2$ с двумя образующими. в) Докажите, что граф Γ_a стягиваем (гомотопически эквивалентен точке).

Указание. Вначале дайте точное определение графа Γ_a (какие в нем вершины и ребра).

Задача 7. а) Постройте накрытие $p_b : \Gamma_b \to S^1 \vee S^1$, где граф Γ_b изображен на рис. 1b. б) Вычислите подгруппу $(p_b)_*(\pi_1(\Gamma_b)) \subset \mathcal{F}_2$, (т.е. укажите критерий того, что данный элемент $x \in \mathcal{F}_2$ принадлежит этой подгруппе). в) Нормальна ли подгруппа $(p_b)_*(\pi_1(\Gamma_b)) \subset \mathcal{F}_2$? г) Опишите $\pi_1(\Gamma_b)$ как группу, то есть задайте образующими и соотношениями.

Задача 8. а) , б) , в) , г) . Те же вопросы про граф, изображенный на рис. 1c.

Задача 9. а) Топологическое пространство Γ является связным n-листным накрытием букета из k окружностей. Докажите, что Γ гомеоморфно конечному графу, и найдите число вершин и ребер этого графа. б) Используя результаты задачи 9a и задачи 3 листка 6, докажите, что если группа G является подгруппой свободной группы $\mathcal{F}_k$ с k образующими, и индекс $|\mathcal{F}_k : G| = n$ конечен, то G изоморфна свободной группе F_p. Выразите число p через n и k. Продумайте возможность чисто алгебраического доказательства этого утверждения.

Задача 10. Комплексное число c называется критическим значением многочлена $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, если найдется $z \in \mathbb{C}$ такое, что $P(z) = c$, $P'(z) = 0$. а) Пусть $U_P \subset \mathbb{C}$ — множество некритических значений многочлена P, и $V_P \stackrel{\text{def}}{=} P^{-1}(U_P) \subset \mathbb{C}$. Докажите, что отображение $P : V_P \to U_P$ — n-листное накрытие, где n — степень многочлена P. б) Докажите, что U_P гомотопически эквивалентно букету окружностей, а $\pi_1(U_P, b)$ — свободная группа. Укажите явно образующие этой группы. в) Опишите действие $\pi_1(U_P, b)$ на слое $P^{-1}(b) \subset V_P$ (поднятиями петель) в случае $P(z) = z^n$, $b = 1$. г) Тот же вопрос для $P(z) = z^n - nz - 1$, $b = 0$.

Указание. В задаче 10б полезно придумать не одну, а несколько систем образующих.