8. КЛЕТОЧНЫЕ РАЗБИЕНИЯ.

1. Общая топология клеточных пространств

При решении задач можно (и нужно!) свободно пользоваться теоремой о клеточной аппроксимации.

Задача 1. а) Докажите, что клеточное пространство компактно тогда и только тогда, когда оно состоит из конечного количества клеток. б) Всякое ли клеточное пространство хаусдорфово?

Задача 2. Докажите, что клеточная топология в остове $\mathrm{sk}_n(X) \subset X$ совпадает с топологией, индуцированной из X (топологией подмножества); здесь X — клеточное пространство с клеточной топологией.

Задача 3. а) Докажите, что компоненты линейной связности клеточного пространства открыты и замкнуты, а само оно связно тогда и только тогда, когда линейно связно. б) Докажите, что линейно связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной нульмерной клеткой.

Задача 4. Пусть X — линейно связное клеточное пространство, а $\iota_n : \mathrm{sk}_n(X) \to X$ — тавтологическое вложение. а) Докажите, что отображение $(\iota_2)_* : \Pi_1(\mathrm{sk}_2(X)) \to \Pi_1(X)$ — эквивалентность категорий. б*) Приведите пример пространства X, для которого ι_2 не является гомотопической эквивалентностью.

Задача 5. а) Пусть X — клеточное пространство, состоящее из конченого набора клеток $e_1, \dots, e_N$; наибольшая размерность клетки равна n. Докажите, что X получается из своего $(n-1)$-остова $\mathrm{sk}_{n-1}(X)$ приклеиванием всех n-мерных клеток по характеристическому отображению границы, т.е. гомеоморфно фактор-пространству $\mathrm{sk}_{n-1}(X) \sqcup \bigsqcup_{i \in I_n} B_{n,i}$ (где $B_{n,i}$ — замкнутый n-мерный шар для любого $i \in I_n$) по отношению $u \sim \chi_i(u)$, где $u \in \partial B_{n,i}$, $\chi_i : \partial B_{n,i} \to \mathrm{sk}_{n-1}(X)$ — ограничение характеристического отображения i-й n-мерной клетки на границу шара. б*) Приведите пример бесконечного клеточного пространства с клетками размерности, не превышающей n, для которого утверждение, аналогичное пункту 5а, неверно.

Задача 6. Докажите, что в свободной группе с 2 образующими a и b элементы ab и ba не совпадают.

2. Примеры клеточных пространств

Задача 7. Докажите, что в примерах 1–7 лекции 12 построенные клеточные разбиения действительно являются таковыми для указанных пространств (сфер, сферы с ручками, $\mathbb{R}P^n$ и т.д.) — иными словами, что топология, проективная относительно характеристических отображений клеток, совпадает с обычной топологией в этих пространствах.

Задача 8. а) Совпадает ли клеточная топология в S^∞ (пример 8 лекции 12) с топологией, проективной относительно всех тавтологических вложений $\iota_n : \mathrm{sk}_n(S^\infty) \to S^\infty$? б) Докажите, что для любого $n \geq 0$ остов $\mathrm{sk}_n(S^\infty)$ стягиваем в остове $\mathrm{sk}_{n+1}(S^\infty)$ в точку. Выведите отсюда, что топологическое пространство S^∞ (с клеточной топологией) стягиваемо.

Задача 9. Докажите, что клеточная топология на счетном букете отрезков (с естественным клеточным разбиением — уточните!) совпадает с топологией задачи 8 листка 2 (и, следовательно, неметризуема).

Задача 10. Постройте клеточное разбиение и вычислите фундаментальную группу а) объединения двумерной сферы и ее диаметра, б) симметрического квадрата окружности — фактора $S^1 \times S^1$ по отношению эквивалентности $(x, y) \sim (y, x)$, $x, y \in S^1$, в) симметрического куба окружности (определение придумайте самостоятельно), г) симметрического квадрата тора $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$, д) дополнения $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Задача 11. Докажите, что стандартное разбиение $\mathbb{C}P^n = \{pt\} \sqcup \mathbb{C} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{C}^n$ представялет собой клеточное разбиение, и выведите из этого, что $\mathbb{C}P^n$ односвязно.

Задача 12. Докажите, что сферы с g ручками при различных g, проективная плоскость, лента Мебиуса и бутылка Клейна попарно гомотопически не эквивалентны.

Задача 13. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и G_a — фундаментальная группа дополнения в $\mathbb{R}^3 \setminus (\Omega \cup \omega_a)$, где $\Omega = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ и $\omega_a = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-a)^2 + z^2 = 1\}$ (две окружности). Докажите, что $G_1 = \mathbb{Z}^2$, а G_3 — свободная группа с 2 образующими (и, как следствие, соответствующие дополнения гомотопически не эквивалентны).