ПРОГРАММА ЗАЧЕТА

Программа состоит из утверждений, которые нужно уметь доказывать. Предполагается, что необходимые определения и вспомогательные факты (леммы) сдающий подберет самостоятельно.

Звездочкой отмечены супервопросы. Они в целом не сложнее обычных, но в лекциях их не было — нужно разбираться самостоятельно. На супервопросы сдающий зачет отвечает по желанию. Двумя звездочками отмечены две технические теоремы из конца курса, доказательства которых мы изучить не успели. Их доказательства сдающий рассказывает только по особому желанию.

Теоретические вопросы

1. Для всякого топологического пространства Z отображение $g : Z \to Y$, где топология в Y инъективна относительно отображений $f_\alpha : Y \to X_\alpha$, непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывны все композиции $f_\alpha \circ g : Z \to X_\alpha$. *Аналогичное утверждение для проективной топологии.
2. Линейно связное пространство связно.
3. Объединение двух связных (*линейно связных) подмножеств с непустым пересечением связно (*линейно связно).
4. Образ связного (*линейно связного) пространства при непрерывном отображении связен (*линейно связен).
5. Гомотопическая категория является категорией.
6. Образ компакта при непрерывном отображении — компакт.
7. Замкнутое подмножество компакта — компакт. Компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.
8. Компактное метрическое пространство ограничено и полно.
9. Теорема Александера о предбазе.
10. Теорема Тихонова о компактности произведения компактов.
11. Подмножество $\mathbb{R}^n$ компактно, если и только если оно ограничено и замкнуто.
12. Фундаментальный группоид является группоидом (категорией, где все морфизмы обратимы), а фундаментальная группа — группой.
13. Фундаментальная группа линейно связного пространства не зависит от выбора отмеченной точки. *Полугруппы морфизмов эквивалентных объектов любой категории в себя изоморфны. *Функтор обмена.
14. Фундаментальный группоид — функтор из топологической категории (в категорию малых категорий).
15. Фундаментальные группоиды гомотопически эквивалентных пространств — эквивалентные категории.
16. Теорема о накрывающей гомотопии.
17. Если $p : E \to B$ — накрытие, то гомоморфизм p_* фундаментальных групп — инъекция (мономорфизм).
18. Прообразы точек базы в накрывающем пространстве образуют представление (функтор в категорию множеств) фундаментального группоида базы. *Ограничение этого представления на фундаментальную группу $\pi_1(B, b)$ базы в отмеченной точке эквивалентно действию этой группы умножением слева на множестве правых классов смежности $\pi_1(B, b)/p_*(\pi_1(E, a))$.
19. Существование универсального накрытия.
20. Множество морфизмов между двумя объектами категории накрытий содержит не более одного элемента.
21. Категория накрытий эквивалентна категории подгрупп фундаментальной группы базы (с упорядочением по включению).
22. Фундаментальная группа букета окружностей — свободная группа, образующие которой находятся во взаимно однозначном соответствии с окружностями букета.
23. **Теорема о клеточной аппроксимации.
24. Фунадаментальная группа линейно связного клеточного пространства изоморфна фундаментальной группе его 2-остова и является факторгруппой фундаментальной группы его 1-остова.
25. **Соотношения в фундаментальной группе клеточного пространства соответствуют двумерным клеткам.

Примеры и конструкции

Это важная часть курса и их нужно знать. Они не будут отдельными вопросами, но могут “вылезти” при обсуждении теории. Звездочками отмечены чуть более сложные конструкции.

1. Канторово множество компактно, нигде не плотно, равномощно отрезку, не содержит связных подмножеств более чем из одной точки и гомеоморфно счетной степени двухточечного дискретного пространства.
2. Объединение окружности и спирали (“варшавская окружность”) связно, но линейно не связно.
3. Шар в пространстве $C[a, b]$ непрерывных функций ограничен и полон, но не компактен.
4. *Векторное пространство $\mathbb{F}^n$ (над произвольным полем $\mathbb{F}$) с топологией Зарисского — компакт.
5. Пример отображения, где каждая точка образа имеет окрестность, проообраз которой гомеоморфен ее произведению на заранее фиксированное дискретное пространство, но отображение не является накрытием.
6. *S^∞ (с клеточной топологией) стягиваема и является двулистным накрытием $\mathbb{R}P^\infty$.