Листок 5.

Задача 1. Докажите, что $\sin nx$ не имеет сходящейся по мере подпоследовательности на $[0, 1]$.

Задача 2. Докажите, что сходимость почти всюду не задается топологией.

Задача 3. Пусть μ – конечная неотрицательная мера. Докажите, что если f_n сходится к f по мере μ, то $\Psi(f_n)$ сходится к $\Psi(f)$ по мере μ для всякой непрерывной функции Ψ.

Задача 4. Приведите пример измеримой по Лебегу функции f на $[0, 1]$ такой, что всякая измеримая функция g, совпадающая почти всюду с f, всюду разрывна.

Задача 5. Докажите, что для всякой измеримой по Лебегу функции f на $\mathbb{R}^n$ существует борелевская функция g такая, что $f = g$ почти всюду.

Задача 6. Докажите, что если f – локально липшицево отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то образ множество меры нуль является множеством меры нуль по Лебегу.

Задача 7. Пусть $C(x)$ – функция Кантора. Найдите меры множества Кантора при отображении $C(x) + x$.

Задача 8. Приведите пример последовательности измеримых функций f_n, которые сходятся почти всюду к нулю на $[0, 1]$ с мерой Лебега, но последовательность интегралов от f_n по $[0, 1]$ не сходится.

Задача 9. Пусть f_n – последовательность измеримых функций, которые почти всюду сходятся к функции f отрезке $[0, 1]$ с мерой Лебега. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) e^{-f_n^2(x)}\, dx = \int_0^1 f(x) e^{-f^2(x)}\, dx.$$

Задача 10. Предположим, что задана ограниченная функция f на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\mathbb{T}_n$ – последовательность разбиений отрезка $[0, 1]$ точками $x_k^n = k/2^n$, $\Delta_k^n = [x_{k-1}^n, x_k^n)$ при $k < 2^n$ и $\Delta_n^k = [x_{n-1}^k, x_n^k]$ при $k = 2^n$. Положим

$$h_n = \sum_k \inf_{\Delta_k^n} f I_{\Delta_k^n}, \quad g_n = \sum_k \sup_{\Delta_k^n} f I_{\Delta_k^n}.$$

(a) Докажите, что $h_n \le f \le g_n$, $h_n \le h_{n+1}$ и $g_{n+1} \le g_n$.

(b) Докажите, что f интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (g_n - h_n)\, dx = 0.$$

(c) Докажите, что для почти всех $x \in [0, 1]$ по мере Лебега $g_n(x) - h_n(x) \to \omega(f, x)$, где функция $\omega(f, x)$ – колебание f в точке x.

Задача 11. Докажите критерий Лебега: ограниченная функция интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она почти всюду непрерывна.

Задача 12. Докажите, что если функция f интегрируема на $[0, 1]$ по Риману, то она интегрируема по Лебегу и интегралы совпадают.