Листок 6.

Задача 1. Найдите объем пересечения внутренностей двух цилиндров $x^2+y^2=1$, $x^2+z^2=1$.

Задача 2. Найдите объем тела, которое получается вращением куба вокруг диагонали.

Задача 3. Докажите, что объем тора, который получается вращением вокруг оси OZ круга

$$(x-R)^2+z^2=r^2,$$

где $r<R$, равен объему цилиндра, в основании которого лежит круг радиуса r, а высота равна $2\pi R$.

Задача 4. Прямоугольник разбит на конечное число прямоугольников, у каждого из которых хотя бы одна из сторон имеет рациональную длину. Докажите, что у исходного прямоугольника одна из сторон имеет рациональную длину.

Задача 5. Приведите пример, когда повторные интегралы существуют и равны, а двойной интеграл не существует.

Задача 6. Обоснуйте равенство

$$\int_X |f|^p\,d\mu = p\int t^{p-1}\mu(x\colon\ |f(x)|>t)\,dt.$$

Задача 7. Пусть $I=[0,1]^n$. Найдите

$$\int_I \min\{x_1,\ldots,x_n\}\,dx,\quad \int_I \max\{x_1,\ldots,x_n\}\,dx,$$

$$\int_I \Big(\min\{x_1,\ldots,x_n\}\Big)^p\Big(\max\{x_1,\ldots,x_n\}\Big)^q\,dx,\ p,q>0.$$

Задача 8. Найдите объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Задача 9. Докажите равенства

(i)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|)\,dx = n\omega_n\int_0^{+\infty} f(r)r^{n-1}\,dr,$$

где ω_n – объем единичного шара.

(ii)

$$\int_{x_1\ge 0,\ldots,x_n\ge 0} f(\max\{x_1,\ldots,x_n\})\,dx = n\int_0^{+\infty} f(r)r^{n-1}\,dr.$$

Задача 10. Пусть $f\ge 0$ и $f(tx)=|t|^p f(x)$. Докажите, что

$$\lambda_n\Big\{x\colon\ f(x)\le 1\Big\} = \frac{1}{\Gamma(1+n/p)}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f(x)}\,dx,\quad \Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt.$$

Рассмотрите частный случай, когда $f(x)=\sum_j |x_j|^p$.