Листок 1
ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ II

1. Докажите, что $\nabla_i R^i_j = \frac{1}{2}\nabla_j S$. Здесь $R^i_j = g^{ik}R_{kj}$ – тензор Риччи и $S = R^i_i$ – скалярная кривизна.

2. Пусть (M, g) – риманово многообразие единичного объёма, т.е. $\int_M dv_g = 1$. Проварьировать функционал $\int_M S dv_g$ по всем метрикам единичного объёма.

3. Пусть (M, g) – риманово многообразие $\dim M \geqslant 3$ такое, что $R_{ij} = \lambda(x) g_{ij}$. Докажите, что $\lambda(x) = const$, т.е. многообразие является эйнштейновым.

4. a) Докажите, что лапласиан риманова многообразия (M, g) некоторой функции f можно считать по формуле $\Delta_g f = -Tr Hess_g f$, где $Hess_g f = \nabla df$ – гессиан функции f на (M, g).

b) Пусть (M, g) – подмногообразие многообразия (N, h). Пусть $Hess^M f$ и $Hess^N f$ – гессианы функции f на (M, g) и (N, h) соответсвенно. Выразить $Hess^M f$ через $Hess^N f$ и вторую квадратичную форму. Найти связь между лапласианом Δ^M многообразия (M, g) и лапласианом Δ^N многообразия (N, h). Доказать, что в $(\mathbb{R}^n, g_{can})$ нет компактных минимальных подмногообразий.

c)** Предположим, что (M, g) и (N, h) из пункта b) замкнуты. Найти связь между спектрами (M, g) и (N, h), т.е. формулу связи собственных значений $\lambda_k(M, g)$ и $\lambda_k(N, h)$. Рассмотреть случай, когда (M, g) минимально в (N, h).

5. Пусть (M, g) – риманово многообразие и $f \in C^\infty(M)$ такая, что $|\nabla_g f|_g = 1$. Пусть c – регулярное значение f. Докажите, что вторая квадратичная форма B множества уровня $M_c = \{x \in M |\ f(x) = c\}$ является минус гессианом функции f, т.е. $B_{ij} = -\nabla_i \nabla_j f$.

6. Докажите формулу Бохнера:

$$-\frac{1}{2}\Delta_g(|df|^2_g) = |Hess f|^2_g - |\Delta_g f|^2 + Ric(df^\#, df^\#),$$

где $f \in C^\infty(M)$ и $\#$ – музыкальный изоморфизм кокасательного и касательного пространств, т.е. $\forall \omega \in \Omega^1(M)$ $\omega^\#$ определяется как $\langle \omega^\#, X\rangle_g = \omega(X)$ $\forall X \in \Gamma(TM)$.

7*. Пусть (M, g) – риманово многообразие и $\varphi \in C^\infty(M)$. Докажите, что задача теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + \Delta_g u(x,t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi \end{cases}$$

имеет единственное решение. Докажите, что оно гладкое.
Подсказка: $\frac{\partial}{\partial t}\int_M u^2(x,t)dx \leqslant 0$.

8. Докажите, что функция $G(x, y)$ на $(\mathbb{R}^n, g_{can})$ определённая как

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln|x-y|, \text{ если } n = 2, \\ \frac{1}{n(2-n)\omega_n}(x-y)^{2-n}, \text{ если } n > 2, \end{cases}$$

где ω_n – объём единичного шара в $(\mathbb{R}^n, g_{can})$, является фундаментальным решением оператора Лапласа на $(\mathbb{R}^n, g_{can})$, т.е. $\Delta_x G(x,y) = \delta_y(x)$. Эта функция называется *функцией Грина.*

9. Пусть (M, g) – риманово многообразие. Докажите, что для всякой функции $u \in C^2(M)$ и всякого $\varepsilon > 0$ верно, что

$$2\int_M |\nabla_g u|^2 dv_g \leqslant \varepsilon \int_M (\Delta_g u)^2 dv_g + \frac{1}{\varepsilon}\int_M u^2 dv_g.$$

10. Пусть функция $u\colon \mathbb{B}(0,R)\to\mathbb{R}$ гармонична и неотрицательна. Выведите из неравенства Гарнака в общем виде следующую версию неравенства Гарнака для гармонических функций в шаре, известную из стандартного курса по уравнениям с частными производными:

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0)\leqslant u(x)\leqslant \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0).$$

11. Докажите, что энергия Дирихле $E[u]=\int_M|\nabla_g u|_g^2 dv_g$ является выпуклым функционалом, т.е. $E[tu+(1-t)v]\leqslant tE[u]+(1-t)E[v],\ \forall u,v\in H^1(M,dv_g)$.

12. *a*) Пусть (M,g) – компактное многообразие с краем, $\psi\in L^2(M,dv_g)$ и $\varphi\in H^1(M,dv_g)$. Пусть u – слабое решение уравнения Пуассона $\Delta_g u=f$ такое, что $u-\varphi\in H_0^1(M,dv_g)$. Докажите следующую оценку:

$$||u||_{H^1(M,dv_g)}\leqslant C(g)(||\varphi||_{H^1(M,dv_g)}+||\psi||_{L^2(M,dv_g)}).$$

b) Оцените константу $C(g)$ в оценке из пункта *a*), используя спектр задачи Дирихле многообразия (M,g).