Листок 2
ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ II

1. Пусть (M, g_0) — замкнутое риманово многообразие такое, что $S_{g_0} \equiv 0$, но $Ric_{g_0} \neq 0$ хотя бы в одной точке. Докажите, что существует метрика g такая, что $S_g > 0$.

Указание: Используйте вычисление в задаче 2 листка 1.

2. Рассмотрим $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, g), n \geqslant 3$, где $g = \left(1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}}\right)^{\frac{4}{n-2}} \delta$ — метрика Шваршильда *массы* $m \geqslant 0$, а δ — евклидова метрика. Докажите, что $S_g = 0$. Докажите, что $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, g)$ является асимптотически плоским и найдите его АДМ-массу. Докажите, что гиперповерхность $|x| = \frac{m}{2}$ является вполне геодезичной (эта поверхность называется *горизонтом*).

3. Докажите, что АДМ-масса асимптотически плоского многообразия определена корректно (т.е. что предел в определении АДМ-массы действительно существует).

Указание: Воспользуйтесь теоремой Стокса.

4. Разберите набросок доказательства утверждения 2.10 стр. 16 записок лекций Шейна (см. страничку курса) и дайте его полное доказательство.

5. Пусть $(M^n, g), n \geqslant 3$ асимптотически плоское. Рассмотрим $u = 1 + \frac{A}{2|x|^{n-2}} + O(|x|^{-2})$. Докажите, что многообразие $(M, u^{\frac{4}{n-2}} g)$ также является асимптотически плоским, причём для АДМ-масс этих многообразий верно, что

$$m(u^{\frac{4}{n-2}} g) = m(g) + (n-1)A.$$

6. Пусть $(M^n, g), n \geqslant 3$ асимптотически плоское положительной скалярной кривизны. Постройте асимптотически плоскую метрику нулевой АДМ-массы, скалярная кривизна которой отрицательна хотя бы в одной точке.