Локально тривиальные расслоения

Задача 1.1. Пусть $E \xrightarrow{p} B$ — локально тривиальное расслоение со слоем F, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — тривиализующее покрытие, и, наконец, $\varphi_{\beta\alpha}$ — соответствующие отображения переклейки. Покажите, что $E' \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{\alpha\in A} U_\alpha \times F \big/ \big((x,f)\sim\varphi_{\beta\alpha}(x,f)\big)$ с отображением на B, индуцированным проекцией на первый сомножитель, есть расслоение изоморфное E.

Задача 1.2. Покажите, что расслоение листа Мёбиуса M над окружностью S^1 не тривиально.

Задача 1.3. Опишите отображения переклейки для *вещественного* расслоения Хопфа $S^n \to \mathbb{R}P^n$.

Задача 1.4. Пусть $S^{2n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(z_0,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^{n+1} \mid |z_0|^2+\cdots+|z_n|^2=1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{C}^{n+1}$. Определим $h\colon S^{2n+1}\to\mathbb{C}P^n$ формулой

$$h(z_0,\ldots,z_n)=[z_0:\ldots:z_n].$$

а) Покажите, что $h\colon S^{2n+1}\to\mathbb{C}P^n$ — локально тривиальное расслоение. Какой у него слой? Оно называется *расслоением Хопфа.*
б) Покажите, что расслоение Хопфа не тривиально.

Задача 1.5. Введите структуру гладкого многообразия на «многообразии» Штифеля $V_{m,n}$.

Гомотопические группы

Задача 1.6. Пусть (X,A,x_0) — пара пространств с отмеченной точкой. Проверьте точность последовательности пары

$$\cdots\to\pi_n(A,x_0)\to\pi_n(X,x_0)\to\pi_n(X,A,x_0)\to\pi_{n-1}(A,x_0)\to\cdots$$

Задача 1.7. Покажите, что отображение $p_*\colon \pi_n(E,F,f_0)\to\pi_n(B,b_0,b_0)$, индуцированное проекцией локально тривиального расслоения, сюръективно.

Задача 1.8. С помощью точной последовательности гомотопических групп для расслоения покажите, что **а)** $\pi_n(S^2)\cong\pi_n(S^3)$ при $n\geqslant 3$; **б)** $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty)\cong\mathbb{Z}$, и $\pi_n(\mathbb{C}P^\infty)=0$ при $n\neq 2$.
в) Выведите из этого, что $\pi_n(S^2)\cong\pi_n(S^3\times\mathbb{C}P^\infty)$.
Тем не менее, как было показано на лекции, эти пространства не гомотопически эквивалентны, что показывает необходимость наличия отображения в теореме Уайтхеда.