Операции

Задача 3.1. Пусть $f\colon S^1 \to S^1$ — отображение степени n, например, $z \mapsto z^n$. Опишите $f^*\gamma_1^1$.

Задача 3.2. Пусть γ_1^1 — тавтологическое расслоение над окружностью $S^1 \cong \mathbb{R}P^1$. Покажите, что сумма Уитни $\gamma_1^1 \oplus \gamma_1^1$ изоморфна двумерному тривиальному расслоению.

Задача 3.3. Покажите, что $\gamma_1^1 \otimes \gamma_1^1$ — тривиальное расслоение.

Задача 3.4. Пусть $\xi_1, \xi_2 \subseteq \eta$ такая пара подрасслоений над B, что в любой точке $b \in B$ выполнено $F_b(\xi_1) \oplus F_b(\xi_2) \cong F_b(\eta)$. Покажите, что $\xi_1 \oplus \xi_2 \cong \eta$.

Задача 3.5. Покажите, что для любого векторного расслоения ξ расслоение $\mathrm{Hom}(\xi, \xi)$ обладает всюду ненулевым сечением. В частности, если ξ — линейное расслоение, то $\mathrm{Hom}(\xi, \xi)$ тривиально.

Задача 3.6. Покажите, что если ξ — векторное расслоение над паракомпактной базой, то ξ можно снабдить евклидовой метрикой.

Задача 3.7. Покажите, что евклидово векторное расслоение изоморфно своему двойственному.

Задача 3.8. а) Покажите, что операция тензорного произведения вводит на $\mathrm{Vect}^1(B)$ структуру абелевой группы для *любой* базы B.
б) Покажите, что расслоение обладает евклидовой метрикой тогда и только тогда, когда его порядок в этой группе не превосходит двух.

Задача 3.9. Пусть μ и μ' евклидовы метрики на одном и том же векторном расслоении ξ. Покажите, что существует такой автоморфизм векторных расслоений $f\colon E(\xi) \to E(\xi)$, что $\mu' = \mu \circ f$.

Задача 3.10. Пусть ξ — векторное расслоение над компактной хаусдорфовой базой B.
а) Докажите, что существует такое векторное расслоение η, что расслоение $\xi \oplus \eta$ изоморфно тривиальному.

Обозначим через $\Gamma(\xi)$ — $C^0(B)$-модуль сечений расслоения ξ.
б) Покажите, что $\Gamma(\xi_1 \oplus \xi_2) \cong \Gamma(\xi_1) \oplus \Gamma(\xi_2)$.
в) Покажите, что ξ тривиально тогда и только тогда, когда $\Gamma(\xi)$ — свободный модуль.
г) Покажите, что $\Gamma(\xi)$ — конечно порождённый проективный модуль. И обратно, пусть Q — конечно порождённый проективный модуль, покажите, $Q \cong \Gamma(\xi)$ для некоторого ξ.
д) Докажите, что $\xi_1 \cong \xi_2$ тогда и только тогда, когда $\Gamma(\xi_1) \cong \Gamma(\xi_2)$.
е) Наконец, докажите, что категория векторных расслоений над компактной базой B эквивалентна категории конечно порождённых $C^0(B)$-модулей.