Многообразия Грассмана и универсальные расслоения

Задача 5.1. а) Пусть $s\colon \mathbb{P}(W^*) \times \mathbb{P}(V) \xrightarrow{([\psi],[v])\mapsto[\psi\otimes v]} \mathbb{P}\big(\mathrm{Hom(W,V)}\big)$ — вложение Сегре. Положим $\dim W = n+1$, $\dim V = m+1$. Опишите $s^*(\gamma^1_{mn+m+n})$.

Напомним, что имеет место изоморфизм $\mathbb{F}_2$-алгебр $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[t]$. Для линейного расслоения ξ, классифицируемого отображением $f\colon B(\xi) \to \mathbb{R}P^\infty$, положим $w_1(\xi) \overset{\text{def}}{=} f^*(t)$.

б) Покажите, что для линейных расслоений ξ, η имеет место равенство $w_1(\xi\otimes\eta) = w_1(\xi) + w_1(\eta)$.

в) Покажите, что линейное расслоение ξ тривиально тогда и только тогда, когда $w_1(\xi) = 0$.

Задача 5.2. Покажите, что касательное расслоение $\tau_{Gr_{m,n}}$ над многообразием Грассмана $Gr_{m,n}$ изоморфно расслоению $\mathrm{Hom(\gamma^m(\mathbb{R}^n), \gamma^m(\mathbb{R}^n)^\perp)}$, где ортогональное дополнение берётся в тривиальном расслоении $\underline{\mathbb{R}}^n$.

Задача 5.3. (*Вложение Плюкера*) Покажите, что отображение $V_{m,n} \xrightarrow{(x_1,\dots,x_m)\mapsto[x_1\wedge\dots\wedge x_m]} \Lambda^m(\mathbb{R}^n)$ факторизуется в гладкое вложение $Gr_{m,n} \hookrightarrow \mathbb{R}P^{\binom{n}{m}-1}$.