## Спектральные последовательности

**Теорема** (Спектральная последовательность Лере-Серра). *Пусть $E \to B$ — такое расслоение над линейно связной базой и связным слоем $F$, что действие фундаментальной группы $\pi_1(B, x_0)$ на когомологиях слоя $H^*(F; R)$ тривиально. Тогда существует естественная мультипликативная спектральная последовательность $\{E_r, d_r\}_{r\in\mathbb{Z}_{>0}}$, которая сходится к когомологиям тотального пространства, со вторым листом*:

$$E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F; R)) \Longrightarrow H^{p+q}(E; R).$$

*Сходимость означает, что на когомологиях существует такая убывающая фильтрация*

$$H^n(E; R) = F_0^n \supseteq F_1^n \supseteq \dots \supseteq F_n^n \supseteq 0,$$

*что* $E_\infty^{p,q} \cong F_p^{p+q}/F_{p+1}^{p+q}$.

**Задача 7.1.** Используя естественность спектральной последовательности расслоения, покажите, что композиции

$$H^n(B; R) = E_2^{n,0} \twoheadrightarrow E_2^{n,0} \twoheadrightarrow \dots \twoheadrightarrow E_{n+1}^{n,0} = E_\infty^{n,0} \subseteq H^n(E; R)$$

и

$$H^n(E; R) \twoheadrightarrow E_\infty^{0,n} = E_{n+1}^{0,n} \subseteq \dots \subseteq E_2^{0,n} = H^n(F; R)$$

совпадают с гомоморфизмами $p^* \colon H^n(B; R) \to H^n(E; R)$ и $i^* \colon H^n(E; R) \to H^n(F; R)$ соответственно.

**Задача 7.2.** (Теорема Лере-Хирша)
**а)** Покажите, что если для расслоения $E \to B$ над линейно связной базой отображение ограничения на слой $i^* \colon H^*(E; R) \to H^*(F; R)$ сюръективно, то действие $\pi_1(B, x_0)$ на $H^*(F; R)$ тривиально.

**б)** Пусть $E \to B$ — расслоение над линейно связной базой со связным слоем $F$. Предположим, что $H^n(F; R)$ — свободный $R$-модуль для любого $n$, и что существуют классы $c_j \in H^n(E; R)$ ограничивающиеся в базис когомологий $H^n(F; R)$. Покажите, что отображение

$$\Phi \colon H^*(B; R) \otimes_R H^*(F; R) \to H^*(E; R),$$

определяемое формулой $\Phi(\sum b_j \otimes i^*(c_j)) = \sum p^*(b_j)c_j$, задаёт изоморфизм $R$-модулей.

## Три точные последовательности

Всюду в этой части опускается кольцо коэффициентов и расслоение считается гомологически простым с линейно связной базой.

**Задача 7.3. а)** Пусть $S^n \to X \xrightarrow{\pi} B$ — расслоение со (гомологически) сферическим слоем. Покажите, что имеет место *точная последовательность Гизина*

$$\dots \to H^k(B) \xrightarrow{\smile u} H^{n+k+1}(B) \xrightarrow{\pi^*} H^{n+k+1}(E) \to H^{k+1}(B) \to \dots,$$

для некоторого $u \in H^{n+1}(B)$.

**б)** Используя точную последовательность Гизина, вычислите кольцо $H^*(\mathbb{C}P^n)$.

**Задача 7.4.** Пусть $F \to X \xrightarrow{\pi} S^n$ — расслоение со (гомологически) сферической базой и линейно связным слоем. Покажите, что имеет место *точная последовательность Вана*

$$\dots \to H^k(E) \to H^k(F) \to H^{k-n+1}(F) \to H^{k+1}(E) \to \dots$$

**Задача 7.5.** Пусть $F \to E \xrightarrow{\pi} B$ — расслоение. Предположим, что $H^i(B) = 0$ при $0 < i < p$ и $H^j(F) = 0$ при $0 < j < q$. Покажите, что имеет место *точная последовательность Серра*

$$0 \to H^1(B) \to H^1(E) \to H^1(F) \to H^2(B) \to \dots \to H^{p+q-1}(F).$$

## Вычисления

**Задача 7.6.** Индукцией по $n$ с помощью расслоения $U(n-1) \to U(n) \to S^{2n-1}$ покажите, что $H^*(U(n);\mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[u_1, u_3, \ldots, u_{2n-1}]$, $\deg u_i = i$.

**Задача 7.7.** Пусть $X$ — $q$-связное пространство, $q > 1$. Покажите, что при $i < 2q-2$ имеет место изоморфизм $H^i(\Omega X; R) \cong H^{i+1}(X; R)$.

**Задача 7.8*.** Пусть $S^3 \to K(\mathbb{Z}, 3)$ — отображение, индуцирующее изоморфизм третьих гомотопических групп. Обозначим через $S^3\langle 3\rangle$ его (гомотопический) слой.

**а)** Покажите, что слоев отображения $S^3\langle 3\rangle \to S^3$ является $K(\mathbb{Z}, 2)$.

**б)** Вычислите $H^*(S^3\langle 3\rangle; \mathbb{Z})$.

**в)** Вычислите первую стабильную гомотопическую группу сфер $\pi_1^s = \pi_4(S^3)$.