Для сдачи экзамена необходимо прислать решения до 23:59 29 мая, на почту semyon.abramyan@gmail.com с темой «*фамилия*. Экзамен.».

Экзамен

Задача 1. Вычислите полный класс Штифеля-Уитни $w(\mathbb{C}P^n)$ касательного расслоения $\mathbb{C}P^n$.

Напомним, что ΩX обозначает пространство петель пространства X.

Задача 2. а) Покажите, что $\Omega BG \simeq G$.

б) Покажите, что любое комплексное векторное расслоение над окружностью тривиально.
Указание: воспользуйтесь предыдущим пунктом, чтобы описать множество комплексных расслоений над сферами.

в) Покажите, что имеет место изоморфизм векторных расслоений над $\mathbb{C}P^1$

$$\gamma^1 \oplus \gamma^1 \cong (\gamma^1 \otimes \gamma^1) \oplus \underline{\mathbb{C}}.$$

Задача 3. а) Вычислите кольцо рациональных когомологий $H^*(\Omega S^n; \mathbb{Q})$.

б) Вычислите кольцо целочисленных когомологий $H^*(\Omega S^n; \mathbb{Z})$.
Указание: рассмотрите отдельно случаи чётного и нечётного n.

Задача 4. Пусть ξ и η суть комплексные векторные расслоения ранга 2. Выразите $c_1(S^2\xi \otimes \eta)$, $c_2(S^2\xi \otimes \eta)$ и $c_3(S^2\xi \otimes \eta)$ через классы Черна ξ и η.

Задача 5. Сколько прямых лежит на пересечении двух общих квадрик в $\mathbb{C}P^4$?

Задача 6. Пусть ξ — вещественное векторное расслоение ранга n. Его комплексификация $\xi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ — комплексное векторное расслоение ранга n. Покажите, что $2c_{2i-1}(\xi \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = 0$.