ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ. ЛЕКЦИЯ 2.

СЕМЁН АБРАМЯН

Аннотация. На второй лекции обсуждались примеры векторных расслоений, сечения, метрики на расслоениях и операции ограничения и индуцирования векторных расслоений.

1. Векторные расслоения

Определение 1.1. *Вещественное векторное расслоение* ξ *над* B — локально тривиальное расслоение со структурой вещественного векторного пространства на каждом слое $F_b(\xi) \overset{\text{def}}{=} p^{-1}(b)$, причём любая тривиализация $p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ задаёт изоморфизм векторных пространств $F_b(\xi)$ и $\mathbb{R}^n$. Число n называется рангом расслоения ξ и обозначается $\operatorname{rk}\xi$.

Замечание 1.2. Вообще говоря, не верно, что локально тривиально расслоение со слоем $\mathbb{R}^n$ изоморфно векторному расслоению. К сожалению, все известные примеры весьма нетривиальны, поэтому приводить их мы не будем.

Определение 1.3. Векторные расслоения ξ и η над одной базой B называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм $E(\xi) \to E(\eta)$ между их тотальными пространствами, который индуцирует изоморфизм векторных пространств $F_b(\xi) \xrightarrow{\cong} F_b(\eta)$ над каждой точкой $b \in B$.

Обозначим $\operatorname{Vect}^n(B)$ множество классов изоморфизма векторных расслоений ранга n над базой B.

Приведём различные примеры векторных расслоений.

Пример 1.4 (Тривиальное расслоение $\underline{\mathbb{R}}^n$)**.** Отображение проекции на первый сомножитель $B \times \mathbb{R}^n \to B$ задаёт векторное расслоение ранга n со структурой векторного пространства определяемой формулой

$$t_1(b, x_1) + t_2(b, x_2) = (b, t_1x_1 + t_2x_2).$$

Пример 1.5 (Касательное расслоение τ_M)**.** Пусть M^n — гладкое многообразие. Тогда τ_M состоит из пар (x, v), где v — касательный вектор к M в точке $x \in M$. Структура векторного пространства на слоях определяется, как и выше, формулой

$$t_1(x, v_1) + t_2(x, v_2) = (x, t_1v_1 + t_2v_2).$$

Локальная тривиальность. Пусть $U \subseteq M$ — координатная карта с координатами $x_1, \dots, x_n$. Тогда любой касательный вектор к точке $x \in U$ имеет вид $\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Следовательно, отображение $p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, задаваемое формулой

$$(x, v) \mapsto \big(x, (v^1, \dots, v^n)\big)$$

задаёт искомую тривиализацию.

Определение 1.6. Многообразие M называется *параллелизуемым*, если τ_M изоморфно тривиальному.

Замечание 1.7 (Задача 2.3)**.** Двумерная сфера S^2 *не* параллелизуема.

Пример 1.8 (Нормальное расслоение ν)**.** Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^n$ — вложенное подмногообразие. Позже мы проверим, что пространство $E(\nu) \overset{\text{def}}{=} \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \perp \tau_{M,x}\}$ вместе с проекцией на первый сомножитель задаёт векторное расслоение над M.

Наконец, самый важный пример на данный момент.

Пример 1.9 (Тавтологическое расслоение γ_n^1 над $\mathbb{R}P^n$)**.** Положим $E(\gamma_n^1) \overset{\text{def}}{=} \{(x, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in x\}$. Отображение $E(\gamma_n^1) \xrightarrow{(x,v)\mapsto x} \mathbb{R}P^n$ задаёт *линейное*[1] векторное расслоение, слоем которого над точкой $x \in \mathbb{R}P^n$ является прямая $x \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

версия от 25 февраля 2022 г.

[1] ранга 1

Локальная тривиальность. Пусть $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$, $i = 0, \dots n$. Зададим тривиализацию $p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}$ формулой

$$\big([x_0 : \dots : x_n], \lambda(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})\big) \mapsto ([x_0 : \dots : x_n], \lambda).$$

Теорема 1.10. *Тавтологическое расслоение γ^1_n не тривиально ни для какого $n \geqslant 1$.*

Для доказательства нам понадобится понятие сечения.

Определение 1.11. *Сечение* векторного расслоения ξ — такое непрерывное отображение $s\colon B(\xi) \to E(\xi)$, что $p \circ s = \mathbb{1}_{B(\xi)}$. Сечение s называется *всюду ненулевым*, если $s(b) \neq 0 \in F_b(\xi)$ в любой точке $b \in B(\xi)$.

Замечание 1.12. Сечение касательного расслоения к многообразию называется *векторным полем.*

Доказательство теоремы 1.10. Заметим в первую очередь, что у тривиального линейного расслоения существует всюду ненулевое сечение. Покажем , что у тавтологического расслоения такого нет.

Пусть $s\colon \mathbb{R}P^n \to E(\gamma^1_n)$ — любое сечение. Композиция

$$S^n \to \mathbb{R}P^n \xrightarrow{s} E(\gamma^1_n)$$

переводит точку x в пару $([x], t(x)x)$, где $t\colon S^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Заметим, что $t(-x) = -t(x)$, откуда, в силу связности S^n следует, что $t(x_0) = 0$ для некоторой точки $x_0 \in S^n$. □

Всякая точка из $E(\gamma^1_1)$ представима в виде

$$\big([(\cos\varphi, \sin\varphi)], t(\cos\varphi, \sin\varphi)\big),$$

$0 \leqslant \varphi\pi$, $t \in \mathbb{R}$ причём для $\varphi \neq 0, \pi$ такое представление единственно, а в точках $\varphi = 0, \pi$ происходят отождествления $\big([(1,0)], t(1,0)\big) \sim \big([(-1,0)], -t(-1,0)\big)$. Таким образом, получаем, что $E(\gamma^1_1)$ есть $[0,\pi] \times \mathbb{R}$ с отождествлёнными точками $(0,t) \sim (\pi, -t)$, что, скорее всего, знакомо читателю под названием лента Мёбиуса.[2]

Рассуждение из доказательства теоремы 1.10 обобщается на случай векторных расслоений большего ранга.

Определение 1.13. Сечения $s_1, \dots, s_n$ расслоения ξ называются *линейно независимыми*, если в любой точке $b \in B(\xi)$ векторы $s_1(b), \dots, s_n(b) \in F_b(\xi)$ линейно независимы.

Теорема 1.14. *Расслоение ранга n тривиально тогда и только тогда, когда оно допускает n линейно независимых сечений.*

Теорема почти немедленно следует из следующей ключевой леммы.

Лемма 1.15. *Пусть ξ и η суть векторные расслоения над базой B, и $f\colon E(\xi) \to E(\eta)$ — непрерывное отображение, индуцирующее изоморфизм $F_b(\xi) \to F_b(\eta)$. Тогда f — гомеоморфизм и, в частности, изоморфизм векторных расслоений.*

Доказательство. Измельчив при необходимости окрестности тривиализации, можно считать, что оба расслоения тривиальны над $U \subseteq B$. Композиция $U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi_\eta \circ f \circ \varphi_x i} U \times \mathbb{R}^n$ задаёт по второму сомножителю невырожденную в каждой точке $b \in U$ матрицу $\big(f_{ij}(b)\big)$. Тогда обратный гомеоморфизм задаётся обратной матрицей. □

Пример 1.16. Окружность $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ обладает всюду ненулевым векторным полем

$$s(x_0, x_1) = \big((x_0, x_1), (-x_1, x_0)\big).$$

Аналогично, сфера $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ допускает три линейно независимых векторных поля их координаты в точке (x_0, x_1, x_2, x_3) выглядят следующим образом[3]

$$\begin{aligned}
&(-x_1, \quad x_0, -x_3, \quad x_2) \\
&(-x_2, \quad x_3, \quad x_0, -x_2) \\
&(-x_3, -x_3, \quad x_1, \quad x_0).
\end{aligned}$$

Определение 1.17. *Евклидово* векторное расслоение ξ — векторное расслоение ξ с непрерывной функцией $\mu\colon E(\xi) \to \mathbb{R}$, которая ограничивается в положительно определённую квадратичную форму на каждый слой.

Лемма 1.18. *Тривиальное расслоение облает ортонормированным базисом сечений.*

[2]Если вы обладаете хорошим воображением, представьте себе в этом месте очень красивый рисунок ленты Мёбиуса. Если нет, не расстраивайтесь, возможно, он тут когда-нибудь появится.

[3]Это формулы происходят из формул умножения кватернионов.

2. Операции над векторными расслоениями

Конструкция 2.1 (**Ограничение векторного расслоения**). Пусть ξ — векторное расслоение, и $B' \subseteq B$ — некоторое подмножество. Тогда $p|_{p^{-1}(B')}\colon p^{-1}(B') \to B'$ снова векторное расслоение, которое называется *ограничением* ξ *на* B' и обозначается $\xi|_{B'}$.

Пример 2.2. Пусть $U \subseteq M$ — открытое подмножество гладкого многообразия. Тогда $\tau_U = \tau_M|_U$.

Предыдущая конструкция обобщается на случай произвольного непрерывного отображения.

Конструкция 2.3 (**Индуцированное расслоение**). Пусть $f\colon B' \to B$ — отображение. Определим *индуцированное расслоение* $f^*\xi$ над B' следующим образом.

$$E(f^*\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, e) \in B' \times E(\xi) \mid f(x) = p(e)\}$$

Отображения, индуцированные проекциями на первый и второй сомножители, включаются в следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E(f^*\xi) & \xrightarrow{\widehat{f}} & E(\xi) \\ \big\downarrow{\scriptstyle p} & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Структура векторного пространства на слоях происходит из структуры векторного пространства на слоях расслоения ξ, в частности, отображение $\widehat{f}$ индуцирует изоморфизмы векторных пространств

$$F_x(f^*\xi) \xrightarrow{\cong} F_{f(x)}(\xi).$$

Локальная тривиальность. Пусть (U, h) тривиализация ξ. Покажем, что расслоение $f^*\xi$ тривиализуется над $U' = f^{-1}(U)$. В самом деле, отображение $(x, e) \mapsto (x, \mathrm{Pr}_{\mathbb{R}^n}(h(f(x), e)))$ очевидно задаёт тривиализацию.

Конструкция индуцированного расслоения обладает свойством функториальности, а именно,

$$(f \circ g)^*\xi = g^*(f^*\xi).$$

Замечание 2.4. Конструкция выше остаётся неизменной в гладкой категории.

Теорема 2.5 (Гомотопическая инвариантность). *Пусть $f_0, f_1\colon B' \to B$ — пара гомотопных отображений из паракомпатного пространства B'. Тогда расслоения $f_0^*\xi$ и $f_1^*\xi$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть $F\colon B' \times I \to B$ — гомотопия между f_0 и f_1. Тогда из свойства функториальности имеем, $F^*\xi|_{B' \times \{i\}} = f_i^*\xi$, $i = 0, 1$. Поэтому теорема следует из следующего предложения. □

Предложение 2.6. *Пусть X — паракомпактное пространство, и ξ — векторное расслоение над $X \times I$. Тогда $\xi|_{X \times \{0\}}$ изоморфно $\xi|_{X \times \{1\}}$.*

Доказательство. Шаг 1. Предположим, что ξ тривиально над $X \times [0, a]$ и $X \times [a, 1]$ для $a \in (0, 1)$. Покажем, что тогда расслоение тривиально над всем цилиндром $X \times I$. В самом деле, пусть h_0 и h_1 — тривиализации ξ над $X \times [0, a]$ и $X \times [a, 1]$ соответственно. Определим $h\colon X \times [a, 1] \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} X \times [a, 1] \times \mathbb{R}^n$ формулой

$$(x, t, v) \mapsto (x, t, \mathrm{Pr}_{\mathbb{R}^n}\left((h_0 \circ h_1^{-1})|_{p^{-1}(X \times \{a\})}(x, a, v)\right))$$

Тогда композиция $h \circ h_1$ задаёт тривиализацию над $X \times [a, 1]$, которая совпадает с h_0 над $X \times \{a\}$. Следовательно, их можно склеить в глобальную тривиализацию.

Шаг 2. Покажем, что существует покрытие X такими открытыми множествами U_α, что расслоение ξ тривиально над $U_\alpha \times I$.

Фиксируем $x \in X$. В силу компактности $x \times I$ существует конечный набор множеств $U_{x,i} \times [t_i, t_{i+1}]$, $x \in U_{x,i}$, над которыми расслоение тривиально. Тогда в силу первого шага расслоение тривиально над $(\cap_i U_{x,i}) \times I$.

Шаг 3. Случай компактного X. Пусть $U_1, \ldots, U_k$ — конечное покрытие множествами из предыдущего шага, ρ_i — подчинённое ему разбиение единицы. Обозначим через $X_i \subseteq X \times I$ график функции $\sum_{j=1}^{i} \rho_j$, и пусть $\xi_i = \xi|_{X_i}$. Определим отображение $h_i\colon E(\xi_i) \to E(\xi_{i-1})$ следующим образом: на дополнении к U_i отображение тождественно, на U_i отображение переводит точку $(x, \sum_{j=1}^{i} \rho_j(x), v) \in E(\xi_i)$ в $(x, \sum_{j=1}^{i-1} \rho_j(x), v) \in E(\xi_{i-1})$. В частности, это отображение задаёт ограничивается в изоморфизмы на слоях. Тогда композиция $h_k \circ \cdots \circ h_0$ задаёт изоморфизм расслоений на основаниях цилиндра $X \times I$.

Завершение доказательства будет на третьей лекции. □