ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ. ЛЕКЦИЯ 3.

СЕМЁН АБРАМЯН

Аннотация. На третьей лекции мы завершили доказательство гомотопической инвариантности обратного образа (на случай паракомпактного пространства) и обсудили другие операции над векторными расслоениями.

1. Операции над векторными расслоениями (продолжение).

На прошлой лекции, мы начали доказывать следующее предложение, и доказали его для компактного X.

Предложение 1.1. *Пусть X — паракомпактное пространство, и ξ — векторное расслоение над $X \times I$. Тогда $\xi|_{X\times\{0\}}$ изоморфно $\xi|_{X\times\{1\}}$.*

Заверешение доказательства. Шаг 4. Для завершения доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1.2. *Для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ паракомпактного пространства X существуют счётное покрытие $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, где V_k — счётное объединение открытых, каждое из которых содержится в некотором U_α, и подчинённое этому покрытию разбиение единицы.*

Будем пользоваться обозначениями из шага 3 (см. лекцию 2). Аналогично шагу 3 определим отображения $h_i\colon E(\xi_i) \to E(\xi_{i+1})$. Тогда изоморфизм $\xi|_{X\times\{0\}} \xrightarrow{\cong} \xi|_{X\times\{1\}}$ задаётся композицией $h_0 \circ h_1 \circ \cdots$, которая корректно определена в силу того, что в некоторой окрестности *любой* точки $x \in X$ композиция стабилизируется. □

Замечание 1.3. В предыдущем рассуждении нигде не использовалось то, что ξ — векторное расслоение, использовался только факт локальной тривиальности.

Следствие 1.4. *Гомотопическая эквивалентность $f\colon A \to B$ между паракомпактными пространствами индуцирует биекцию*

$$f^*\colon \mathrm{Vect}^n(B) \to \mathrm{Vect}^n(A).$$

В частности, всякое (векторное) расслоение над диском тривиально.

Конструкция 1.5 (**Произведение расслоений**)**.** Пусть ξ_1, ξ_2 суть векторные расслоения над базами B_1, B_2. Определим расслоение $\xi_1 \times \xi_2$ следующим образом: $E(\xi_1 \times \xi_2) \overset{\text{def}}{=} E(\xi_1) \times E(\xi_2)$, а в качестве проекции возьмём произведение проекций: $p_1 \times p_2\colon E(\xi_1) \times E(\xi_2) \to B_1 \times B_2$. Несложно заметить, что имеет место изоморфизм $F_{(b,b')}(\xi_1 \times \xi_2) \cong F_b(\xi_1) \times F_{b'}(\xi_2)$.

Пример 1.6. Если $M = M_1 \times M_2$ — произведение многообразий, то $\tau_M \cong \tau_{M_1} \times \tau_{M_2}$.

Конструкция 1.7 (**Сумма Уитни**)**.** Пусть теперь ξ_1, ξ_2 — два расслоения над одной и той же базой B. Определим *сумму Уитни* $\xi_1 \oplus \xi_2 \overset{\text{def}}{=} \Delta^*(\xi_1 \times \xi_2)$, где $\Delta\colon B \to B \times B$ отображение диагонали.

Замечание 1.8. Заметим, что диагональ коммутирует с любым непрерывным отображением $f\colon B' \to B$. Функториальность индуцированного отображения влечёт, что имеет место канонический изоморфизм

$$f^*(\xi_1 \oplus \xi_2) \cong f^*(\xi_1) \oplus f^*(\xi_2).$$

Таким образом предложение 1.1 утверждает, что Vect задаёт гомотопический функтор из обратной категории паракомпактных топологических пространств в категорию полугрупп, где операция суммы — сумма Уитни векторных расслоений.

Определение 1.9. Пусть ξ, η — пара расслоений над B, причём $E(\xi) \subseteq E(\eta)$, Расслоение ξ называется *подрасслоением* в η для любой точки $b \in B$ слой $F_b(\xi)$ является векторным подпространством в $F_b(\eta)$.

Пример 1.10. Тавтологическое расслоение γ_n^1 над $\mathbb{R}P^n$ определялось как подрасслоение в тривиальном расслоении $\underline{\mathbb{R}}^{n+1}$.

версия от 1 марта 2022 г.

Пример 1.11. Пусть $N \subseteq M$ вложенное подмногообразие. Тогда τ_N естественным образом является подрасслоением в τ_M.

Конструкция 1.12 (Ортогональные дополнения). Пусть $\xi \subseteq \eta$ — подрасслоение евклидового векторного расслоения. Положим $F_b(\xi^{\perp}) = \{v \in F_b(\eta) \mid v \perp F_b(\xi)\}$, и
$$E(\xi^{\perp}) = \cup_{b \in B} F_b(\xi^{\perp}),$$
наделив последнее топологией подмножества $E(\eta)$. Тогда имеет место естественное непрерывное отображение $E(\xi^{\perp}) \to B$.

Теорема 1.13. *Пространство $E(\xi^{\perp})$ является тотальным пространством некоторого векторного расслоения, которое мы будем обозначать $\xi^{\perp}$. Причём $\xi \oplus \xi^{\perp} \cong \eta$.*

Доказательство. Упражнение. □

Пример 1.14. Если в условиях примера 1.11 предположить, что M — риманово многообразие, то
$$\nu_{N/M} \overset{\text{def}}{=} \tau_N^{\perp} \subseteq \tau_M$$
называется *нормальным расслоением к N в M*.

Напомним, что локально тривиальное расслоение однозначно определяется отображениями переклейки
$$\varphi_{\alpha\beta} \colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times F.$$
В случае векторного расслоения получаем отображение
$$\varphi_{\alpha\beta} \colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n.$$
Заметим, что так как по первой координате отображение тождественно, возникает семейство *линейных* отображений $\mathbb{R}^n \xrightarrow{v \mapsto g_{\alpha\beta}(x)v} \mathbb{R}^n$, параметризованное точками $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Иначе говоря, на пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$ имеем непрерывные отображения $g_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL_n(\mathbb{R})$, которые называются *склеивающими* 1*-коциклами* данного расслоения. Из рассуждения на первой лекции следует, что склеивающие коциклы однозначно с точностью до изоморфизма определяют векторное расслоение.

Теперь с помощью склеивающих коциклов определим ещё несколько операций на векторных расслоениях.

Конструкция 1.15 (двойственное расслоение). Пусть ξ — векторное расслоение, и $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — его тривиализующее покрытие со склеивающими коциклами $g_{\alpha\beta}$. Определим расслоение ξ^* взяв в качестве склеивающих коциклов отображения
$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{x \mapsto g^*_{\alpha\beta}(x)} GL_n(\mathbb{R}).$$

Наконец, последний по порядку, но не по значимости пример.

Конструкция 1.16 (тензорное произведение). Пусть ξ, η — пара векторных расслоений рангов m и n соответственно с одинаковым тривиализующим покрытием $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и склеивающими коциклами $g^{\xi}_{\alpha\beta}$, $g^{\eta}_{\alpha\beta}$ соответственно. Определим $\xi \otimes \eta$ с помощью склеивающих коциклов
$$\widetilde{g}_{\alpha\beta} \colon U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{x \mapsto g^{\xi}_{\alpha\beta}(x) \otimes g^{\eta}_{\alpha\beta}(x)} GL_{mn}(\mathbb{R}).$$
Слои тензорного произведения $\xi \otimes \eta$ естественно изоморфны тензорному произведению слоев ξ и η.

2. Отступление. Важный пример индуцированного расслоения. На пути к принципу расщепления

Пусть V — векторное пространство. Напомним, что линейная группа $GL(V)$ естественным образом действует на $\mathbb{P}(V)$ как множестве одномерных линейных подпространств V. Это наблюдение позволит нам построить по векторному расслоение ассоциированное с ним расслоение со слоем проективное пространство.

Пусть ξ — векторное расслоение. Склеивающие коциклы $g_{\alpha\beta}$ естественным образом задают преобразования
$$(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}P^n \xrightarrow{(x,l) \mapsto (x, g_{\alpha\beta} l)} (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}P^n.$$
Получаемое с помощью таких отображений переклейки локально тривиальное расслоение называется *проективизацией векторного расслоения* ξ и обозначается $\mathbb{P}(\xi)$.

Рассмотрим расслоение $p^*\xi$ индуцированное посредством проекции $p \colon \mathbb{P}(\xi) \to B$. Расслоение $p^*\xi$ естественным образом расщепляется в сумму линейного расслоения L и расслоения ранга $\mathrm{rk}\xi - 1$. В самом деле, пусть

L — тавтологическое расслоение над $\mathbb{P}(\xi)$, иначе говоря, подрасслоение состоящее из точек вида (x, l, v), где $x \in B$, $l \in \mathbb{P}\big(F_b(\xi)\big)$ и $v \in l$.

Таким образом, продолжая по индукции мы получим такое отображение $Fl(\xi) \to B$, что индуцированное им расслоение с ξ будет суммой линейных расслоений.

Замечание 2.1. Чуть позже с помощью лемма Хирша мы покажем, что отображение $p^*\colon H^*(B;\mathbb{Z}) \to H^*(\mathbb{P}(\xi);\xi)$ инъективно, что будет очень важно для обсуждения характеристических классов.