**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.**
**Экзамен. 17.05.2022.**

*Так как на курсе есть студенты, перезачитывающие оценку во ВШЭ, и им нужна оценка не позднее 31 мая, экзамен устраивается не в конце курса, а сейчас. Экзамен поэтому довольно малосодержательный. Но лекции будут ещё продолжаться, будут появляться новые листки, в них будет много нового материала.*

*Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо прислать лектору по электронной почте не позднее вечера среды 25 мая. Большая просьба по возможности для перевода рукописных работ в файл использовать сканер, а не фотографировать на телефон, присылать один файл в формате pdf, а не кучу файлов в формате jpg, и писать ручкой, а не карандашом.*

*Пересчет баллов в оценки НМУ следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно». Для того, чтобы экзамен был засчитан в НМУ, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее трёх задач (включая те листки, которые ещё будут появляться после этого экзамена), но возможны ослабления этого критерия в зависимости от общей ситуации со сдачей задач.*

*Пересчет баллов в оценки ВШЭ следующий:* $\min\left(10, \left\lceil \frac{\textit{сумма баллов}}{5} \right\rceil\right)$. *Зачёт для ВШЭ не нужен.*

**Задача 1.** Рассмотрим кривую, у которой кривизна не обращается в ноль. Пусть $\mathbf{w}$ некоторый постоянный вектор. Доказать, что если в каждой точке кривой соответствующая нормальная плоскость (то есть плоскость, порождённая векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ из репера Френе) содержит вектор $\mathbf{w}$, то кривая плоская *(5 баллов).*

**Задача 2.** Пусть $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e_2}$ образуют ортонормальный базис в касательном пространстве в точке $p$ двумерной поверхности в $\mathbb{E}^3$. Докажите, что

$$H = \mathbf{II}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \mathbf{II}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2).$$

*(5 баллов).*

**Задача 3.** Поверхность называется *линейчатой,* если она параметрически задается в виде $\vec{r}(u,v) = \vec{\rho}(u) + v\vec{a}(u)$. Докажите, что на линейчатой поверхности гауссова кривизна всюду неположительна *(5 баллов).*

**Задача 4.** Из аналитической геометрии вы знаете примеры поверхностей, на которых есть два различных семейства прямолинейных образующих. Докажите, что если на гладкой двумерной поверхности в трехмерном пространстве есть три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является куском плоскости *(10 баллов).*

**Задача 5.** Найти результат параллельного переноса вектора $(0,1,1)$ из точки $(1,0,0)$ однополостного гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$ в точку $(1,-1,1)$ вдоль прямолинейной образующей

$$\begin{cases} x = 1, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

*(10 баллов).*

**Задача 6.** Пусть $[z_0 : \dots : z_n]$ однородные координаты в $\mathbb{R}P^n$. Напомним, что *отображение Веронезе* степени $d$ — это отображение $\nu_d : \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^N$, заданное формулой

$$\nu_d([z_0 : \ldots : z_n]) = [\ldots : z^I : \ldots], \tag{1}$$

где $z^I$ это некоторый моном степени $d$ от $z_0, \ldots, z_n$, а в правой части (1) стоят все мономы степени $d$. Например, при $n = 2$ и $d = 2$ получаем отображение $\mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^5$, заданное формулой

$$\nu_2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 : z_1^2 : z_2^2 : z_0 z_1 : z_0 z_2 : z_1 z_2].$$

Найдите обратный образ $\nu_d^*\gamma^1$ универсального расслоения при этом отображении. *(10 баллов).*

**Задача 7.** Пусть $M$ риманово многообразие, то есть многообразие с заданной евклидовой метрикой в касательном расслоении $TM$ (называемой римановой метрикой). Пусть $\nabla$ связность Леви-Чивиты, то есть согласованная с метрикой связность в касательном расслоении, обладающая свойством симметричности: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. Определим гессиан гладкой функции формулой $\operatorname{Hess} f = \nabla df$. Ясно, что это билинейная форма. Докажите, что она симметрична и найдите выражение для $\operatorname{Hess} f(X, Y)$ в локальных координатах и в «безкоординатном» виде, то есть выразив через дифференциал и ковариантные производные. *(10 баллов).*

**Задача 8.** Метрика в касательном расслоении $TM$ может рассматриваться как тензор $g$ типа $\binom{0}{2}$. Рассмотрим связность $\nabla$ в касательном расслоении $TM$. Обозначим её продление в расслоение $T_2^0 M$ тоже через $\nabla$. Докажите, что согласованность $\nabla$ с метрикой эквивалентна условию $\nabla g = 0$. *(10 баллов).*

**Задача 9.** Докажите, что орбита действия компактной группы Ли является (замкнутым) подмногообразием. *(10 баллов).*

**Задача 10.** Рассмотрим ориентированный грассманиан $\widetilde{G_k(\mathbb{R}^n)}$, точками которого являются пары, состоящие из $k$-плоскости в $\mathbb{R}^n$ и её ориентации. Ясно, что это двулистное накрытие обычного грассманиана $G_k(\mathbb{R}^n)$. Докажите, что как однородное пространство ориентированный грассманиан выглядит как

$$\widetilde{G_k(\mathbb{R}^n)} = \mathrm{SO}(n)/(\mathrm{SO}(k) \times \mathrm{SO}(n-k)).$$

Представьте обычный грассманиан $G_k(\mathbb{R}^n)$ как однородное пространство. Как в этом описании устроено двулистное накрытие $\widetilde{G_k(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$? *(15 баллов).*