

НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 8.
Главные расслоения и однородные пространства. 26.04.2022.

Задача 1. Докажите, что главное расслоение тривиально тогда и только тогда, когда оно имеет глобальное сечение.

Задача 2. Пусть $\pi : P \rightarrow B$ главное расслоение. Докажите, что его обратный образ $\pi^*P \rightarrow P$ тривиальное расслоение.

Задача 3. Пусть $\pi : P \rightarrow B$ нетривиальное главное расслоение. Может ли ассоциированное расслоение $\hat{\pi} : P \times_G F \rightarrow B$ быть тривиальным?

Задача 4. Пусть $E \rightarrow B$ векторное расслоение со структурной группой $G = \text{GL}(k)$, а $\text{Fr}(E) \rightarrow B$ ассоциированное главное расслоение реперов. Постройте явно изоморфизм $\text{Fr}(E) \times_G \mathbb{R}^k \cong E$.

Задача 5. Пусть H подгруппа Ли группы Ли G , а $p : G \rightarrow G/H$, $p(g) = gH$, естественное отображение. Введём топологию на G/H так: $U \subset G/H$ открыто тогда и только тогда, когда $p^{-1}(U) \subset G$ открыто. Докажите, что введенная на G/H топология хаусдорфова, а p непрерывно и открыто.

Задача 6. Пусть H подгруппа Ли группы Ли G . Докажите, что существует такое подмножество $S \subset G$, содержащее единицу $e \in G$, что отображение

$$\nu : S \times H \rightarrow G, \quad \nu(s, h) = sh,$$

является диффеоморфизмом $S \times H$ на открытое подмножество группы Ли G .

Задача 7. Докажите, что если H нормальная подгруппа Ли группы Ли G , то G/H является группой Ли.

Задача 8. Пусть H подгруппа Ли группы Ли G . Будет ли расслоением $G \rightarrow G/H$? Если да, то каким?

Задача 9. Пусть H подгруппа Ли группы Ли G , а $\pi : P \rightarrow B$ главное G -расслоение. Введите гладкую структуру на пространстве P/H орбит группы H на многообразии P и выясните, является ли $P \rightarrow P/H$ расслоением, и если да, то каким.

Задача 10. Пусть $f : G \rightarrow H$ гомоморфизм групп Ли и $H_1 \subset H$ подгруппа Ли. Докажите, что тогда $G_1 = f^{-1}(H_1)$ является подгруппой Ли группы Ли G и $\mathfrak{g}_1 = (d_e f)^{-1} \mathfrak{h}_1$. Указание: постройте естественное действие G на однородном пространстве H/H_1 и посмотрите на стабилизатор при этом действии у точки $p(e) \in H/H_1$, где $e \in H$ и $P : H \rightarrow H/H_1$.