НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 9.
Связности в расслоениях. 24.05.2022.

Задача 1. Доказать, что в любом векторном расслоении существует связность.

Задача 2. Пусть ∇^1 и ∇^2 связности в векторных расслоениях $E_1 \longrightarrow M$ и $E_2 \longrightarrow M$ соответственно.

Доказать, что операция $\nabla^1 \oplus \nabla^2$, определённая как $\nabla^1 \oplus \nabla^2(s_1 + s_2) = \nabla^1 s_1 + \nabla^2 s_2$, $s_i \in \Gamma(M, E_i)$, является связностью в $E_1 \oplus E_2$. Найти локальную 1-форму связности $\nabla^1 \oplus \nabla^2$.

Доказать, что операция $\nabla^1 \otimes \nabla^2$, определённая как $\nabla^1 \otimes \nabla^2(s_1 \otimes s_2) = \nabla^1 s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^2 s_2$, $s_i \in \Gamma(M, E_i)$, является связностью в $E_1 \otimes E_2$. Найти локальную 1-форму связности $\nabla^1 \otimes \nabla^2$.

Пусть ∇ связность в векторном расслоении $E \longrightarrow M$. Пусть $\langle \cdot \, , \cdot \rangle$ естественное спаривание сечения расслоения E и сечения двойственного ему расслоения E^*. Определим операцию ∇^* из условия, что тождество $d\langle s, t\rangle = \langle \nabla s, t\rangle + \langle s, \nabla^* t\rangle$ верно для любых $s \in \Gamma(M, E)$, $t \in \Gamma(M, E^*)$. Доказать, что это связность в E^*. Найти локальную 1-форму этой связности.

Пусть ∇^1 и ∇^2 связности в векторных расслоениях $E_1 \longrightarrow M$ и $E_2 \longrightarrow M$ соответственно. Связность в расслоении $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ можно ввести с помощью изоморфизма $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \cong E_1^* \otimes E_2$. Проверьте, что это то же самое, что определить связность формулой

$$(\nabla f)(s_1) = \nabla^2(f(s_1)) - f(\nabla^1 s_1),$$

где $f \in \Gamma(M, \mathrm{Hom}(E_1, E_2))$, $s_1 \in \Gamma(M, E_1)$.

Задача 3. Докажите, что описанные в предыдущей задаче продолжения согласованных с метрикой связностей на прямые суммы, тензорные произведения и т.д. евклидовых (унитарных) расслоений снова будут согласованы с соответствующими метриками.

Задача 4. Пусть ω локальная 1-форма связности в векторном расслоении. Доказать, что из того, что ω преобразуется при заменах базиса в сечениях по правилу $\tilde{\omega} = T^{-1}\omega T + T^{-1}dT$, следует, что матрица кривизны $F = d\omega + \omega \wedge \omega$ преобразуется при заменах базиса в сечениях по правилу $\tilde{F} = T^{-1}FT$, а потому «склеивается» в корректно определённую глобальную 2-форму со значениями в эндоморфизмах.

Задача 5. Доказать, что значение формы кривизны связности в векторном расслоении на векторных полях X и Y может быть вычислено по формуле $F(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$, то есть если $s \in \Gamma(U, \xi)$, то

$$F(X, Y)s = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X,Y]} s.$$

Задача 6. Пусть у нас есть связность ∇ в векторном расслоении E. Продолжим ее до связности $\nabla^{\mathrm{End}(E)}$ в расслоении $\mathrm{End}(E)$. Докажите тождество Бьянки $\nabla^{\mathrm{End}(E)} F = 0$. Перепишите это как соотношение на кривизну и 1-форму связности.

Задача 7. Определим связность в расслоении $E = P \times_G F$, ассоциированным с главным расслоением P, по связности HP в главном расслоении P следующим образом: горизонтальные подпространства в TE являются образами горизонтальных подпространств в TP при дифференциале естественной проекции $pr : P \times F \longrightarrow P \times_G F$. Докажите, что это определение корректно, то есть инвариантность HP при правом действии группы приводит к тому, что всё равно, какой представитель (p, f) или $(pg, \rho(g^{-1})f)$ точки $[p, f] \in P \times_G F$ брать.

Задача 8. Рассмотрим главное G-расслоение P со связностью, заданной 1-формой $\omega \in \Omega^1(P,\mathfrak{g})^G$, и ассоциированное векторное расслоение $E = P \times_G W$ со слоем W, на котором группа Ли G действует при помощи своего представления $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$. Определим отображение $\nabla : \Gamma(M,E) \longrightarrow \Omega^1(M,E)$ с помощью диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M,E) & \xrightarrow{\nabla} & \Omega^1(M,E) \\ \Big\| & & \Big\| \\ C^\infty(P,W)^G & \xrightarrow{d+\rho(\omega)} & \Omega^1(P,E)_{bas}. \end{array}$$

Докажите, что ∇ удовлетворяет аксиомам ковариантной производной в векторном расслоении E.

Задача 9. Пусть P тривиальное главное GL_n-расслоение над M, то есть $\pi : M \times \mathrm{GL}_n \longrightarrow M$, со связностью, заданной 1-формой ω_P. Рассмотрим ассоциированное с P векторное расслоение $E = P \times_{\mathrm{GL}_n} \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ со слоем $\mathbb{R}^n$, в котором группа GL_n действует при помощи стандартного представления. Пусть $\nabla = d + \omega$ построенная по связности в главном расслоении ковариантная производная в E. Докажите, что

$$\omega_P = \pi^*\omega + g^{-1}dg.$$

Задача 10. Пусть Ω — форма кривизны связности в главном G-расслоении P, а F форма кривизны индуцированной связности в ассоциированном векторном расслоении $E = P \times_G W$ со слоем W, в котором группа Ли G действует при помощи представления $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$. Пусть $d\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(W)$ соответствующее представление алгебры Ли. Докажите, что $F(X,Y)s = d\rho(\Omega(X,Y))s$, где X, Y векторные поля на базе, а $s \in \Gamma(E)$.