Дзета-функции.

Задачи - 3. Теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.

Не пугайтесь количества - доказательство разбито на совсем элементарные шаги.

10. Проверьте, что группа классов иделей $C_{\mathbf{Q}}$ поля $\mathbf{Q}$ изоморфна $\mathbf{R}^*_{>0} \times (\hat{\mathbf{Z}})^* = \mathbf{R}^*_{>0} \prod\limits_p \mathbf{Z}^*_p$. Тем самым, любому характеру $\mathbf{Z}/(m)^* \to \mathbf{C}^*_1$ (они называются характерами Дирихле по модулю m), соответствует характер Гекке конечного порядка поля $\mathbf{Q}$ (ибо $\mathbf{Z}/(m)^*$ есть конечная факторгруппа $\hat{\mathbf{Z}}^*$).

11. а) Пусть p - простое число, не делящее m, а $f(p)$ - порядок вычета $p \mod m$ как элемента группы $\mathbf{Z}/(m)^*$. Положим $g(p) = \phi(m)/f(p)$.

а) Пусть $K = \mathbf{Q}(\sqrt[m]{1})$. Проверьте, что $p\mathcal{O}_K = \prod\limits_{i=1}^{g(p)} \mathfrak{P}_i$, и $f(\mathfrak{P}_i/p) = f(p)$.

б) Проверьте, что

$\prod\limits_\chi (1 - \chi(p)T) = (1 - T^{f(p)})^{g(p)}$, где χ пробегает все характеры Дирихле по модулю m.

в) Положим $L(\chi, s) = \prod\limits_{p \nmid m} (1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}$. Проверьте, что дзета-функция Римана и функция $L(\chi = 1, s)$, а также дзета-функция Дедекинда $\zeta_K(s)$ и функция $\prod\limits_\chi L(\chi, s)$ отличаются на конечное число сомножителей, не обращающихся в нуль при $s = 1$.

г) Докажите, что при $\chi \neq 1$ функция $L(\chi, s)$ голоморфна и $L(\chi, 1) \neq 0$

12. Положим $F(s) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_p \frac{1}{p^s}, F_\chi(s) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{p \nmid m} \frac{\chi(p)}{p^s}, F_a(s) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{p \equiv a \mod m} \frac{1}{p^s}$.

а) Проверьте, что при $s \to 1$ $F(s) \sim \log \zeta(s)$, а $F_\chi(s) \sim \log L(\chi, s)$.

б) Проверьте, что $F_a(s) = \frac{1}{\phi(m)} \sum\limits_\chi \chi^{-1}(a) F_\chi(s)$.

13. Выведите из предыдущего следующую теорему Дирихле. Для подмножества простых чисел A определим плотность $d(A)$ формулой $\sum\limits_{p \in A} \frac{1}{p^s} \sim d(A) \log \frac{1}{s-1}$. Пусть $A \overset{\text{def}}{=} \{p,\ p \equiv a \mod m\}$, где a - обратимый вычет по модулю m. Тогда $d(A) = \frac{1}{\phi(m)}$.