Дзета - функции

1. Конгруэнц - дзета-функция и арифметическая дзета-функция.

Пусть $X/\mathbf{F}_q$ - многообразие над конечным полем. Определим его дзета-функцию (это и есть "конгруэнц - дзета-функция") как формальный степенной ряд $Z(X,T)$, удовлетворяющий соотношению $T\log Z(X,T))' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \#X(\mathbf{F}_{q^n})T^n$ или, что то же самое, $Z(X,T) = \exp(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\#X(\mathbf{F}_{q^n})}{n} T^n)$.

Для вычисления $Z(X,T)$ представим $X(\overline{\mathbf{F}_q})$ в виде несвязного объединения $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbf{F}_q}/\mathbf{F}_q = \widehat{\mathbf{Z}})$ - орбит. Эти орбиты взаимнооднозначно соответствуют замкнутым точкам схемы, отвечающей X. Длина орбиты, отвечающей замкнутой точке x, при этом равняется степени расширения $[k(x) : \mathbf{F}_q]$. Если $X = \mathrm{spec}\,\mathcal{O}$ - аффинная схема, то замкнутые точки суть максимальные идеалы кольца $\mathcal{O}$, и $k(x) = \mathcal{O}/\mathfrak{m}_x$.

Поскольтку точки, составляющие орбиту длины k, определены в точности над теми конечными полями, степень которых над $\mathbf{F}_q$ делится на k, каждая такая орбита вносит в Z - функцию вклад $\exp(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{T^{kn}}{n}) = \frac{1}{1-T^k}$.

Соответственно, $Z(X,T) = \prod\limits_x (\frac{1}{1-T^{[k(x):\mathbf{F}_q]}}) = \prod\limits_x \sum\limits_{i=0}^{\infty} T^{i[k(x):\mathbf{F}_q]} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \#($эффективных 0 - циклов степени n, определенных над $\mathbf{F}_q)\ T^n$.

В частности, $Z(X,T)$ - степенной ряд с целыми неотрицательными коэффициентами.

Здесь эффективный цикл степени n - это набор точек $X(\overline{\mathbf{F}_q})$ в количестве n штук (считая с кратностями), инвариантный относительно действия $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbf{F}_q}/\mathbf{F}_q)$, или, что то же самое, набор замкнутых точек x схемы X (с кратностями e_x), абсолютная норма которого (т.е количество элементов в артиновой алгебре $\oplus_x \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x^{e_x}$) равна q^n. Поскольку разные замкнутые точки x имеют разные поля вычетов $k(x)$, естественно забыть, что все они суть расширения одного и того же поля $\mathbf{F}_q$, и переписать эту формулу в терминах абсолютных норм.

$Z(X,T) = \prod\limits_x (\frac{1}{1-T^{\log \mathrm{N}\,(x)/\log q}}) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \#($эффективных 0 - циклов абсолютной нормы $n)\ T^{\log n/\log q}$.

Заменим формальную переменную T на q^{-s}, формула приобретет более простой вид: $\zeta(X,s)=\prod\limits_x(\frac{1}{1-\mathrm{N}(x)^{-s}})=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\#$(эффективных 0 - циклов абсолютной нормы n) n^{-s}.

Первое из выражений называется эйлеровым произведением, а второе - рядом Дирихле. Именно это определение, в отличие от первоначального, может с многообразий над $\mathbf{F}_q$ быть распространено на произвольные схемы конечного типа над $\mathbf{Z}$.

Если считать s комплексной переменной, то можно говорить о сходимости ряда Дирихле. Область абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$, очевидно, представляет собой некоторую правую полуплоскость (нетрудно проверить, что открытую), возможно, являющуюся пустым множеством или, наоборот, совпадающую с $\mathbf{C}$. Если бы при выборе формулы замены T на s мы опустили минус, то полуплоскость оказалась бы левой - только этим и обоснован наш выбор.

Если X - многообразие над $\mathbf{F}_q$ размерности d, то эйлерово произведение (а вместе с ним и ряд Дирихле) абсолютно сходится при $\Re(s)>d$. Это можно доказать так. Прежде всего, если схема X есть конечное объединение схем X_i, то абсолютная сходимость эйлерова произведения для каждой X_i гарантирует его абсолютную сходимость для X (а если объединение несвязно, то дзета-функция X есть произведение дзета-функций X_i; если ограничиться формальными рядами, то объединение может быть и бесконечным). Далее, пусть $Y\to X$ - накрытие конечной степени r, тогда $\zeta(Y,s)=\prod\limits_{x\in X}\prod\limits_{y\in Y,\ y\mapsto x}(\frac{1}{1-N(y)^{-s}})$. Над каждой замкнутой точкой $x\in X$ лежит не более, чем r замкнутых точек $y\in Y$, при этом $\forall\ \ y|x\ \ N(y)\geq N(x)$, поэтому абсолютная сходимость эйлерова произведения для X гарантирует таковую для Y. Так что, остается проверить наше утверждение для случая, когда X есть d - мерное аффинное пространство $\mathbf{A}^d_{\mathbf{F}_q}$. Воспользовавшись исходным определением $Z(X,T)$ и тем, что $\#X(\mathbf{F}_{q^n})=q^{nd}$, дзета-функцию можно просто вычислить: $\zeta(X,s)=\frac{1}{1-q^{d-s}}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{q^{dn}}{(q^n)^s}$, и абсолютная сходимость ряда Дирихле (а вместе с ним и эйлерова произведения) при $\Re(s)>d$ очевидна.

Если X - схема относительной размерности d над $\mathbf{Z}$, то точно так же можно проверить абсолютную сходимость отвечающего X ряда Дирихле при $\Re(s)>d+1$. Первая часть доказательства проходит буквально, а вместо аффинного пространства над $\mathbf{F}_q$ используется аффинное пространство над $\mathbf{Z}$. Если $X=\operatorname{spec}\mathbf{Z}[T_1,\ldots,T_d]$, то

$\zeta(X,s) = \prod\limits_{x}(\frac{1}{1-\mathrm{N}(x)^{-s}}) = \prod\limits_{p}\prod\limits_{x,\ char(k(x)=p}(\frac{1}{1-\mathrm{N}(x)^{-s}}) = \prod\limits_{p}\frac{1}{1-p^{d-s}} = \zeta(s-d)$. Справа в этой формуле стоит дзета-функция Римана, для которой утверждение о сходимости очевидно. Разница в формулировке ($d+1$ вместо d) связана с тем, что $\operatorname{spec}\mathbf{Z}$ сам по себе уже одномерен.

Для изучения разного рода количественных характеристик множества замкнутых точек схемы X ("распределения простых" в широком смысле слова) полезно как можно точнее представлять себе аналитические свойства функции $\zeta(X,s)$. В частности, удобно было бы мероморфно продолжить её с области сходимости на всю комплексную плоскость, после чего охарактеризовать нули и полюса. Ситуация сильно различается для схем конечного типа над $\mathbf{F}_q$ и над $\mathbf{Z}$. В последнем случае мероморфное продолжение получено лишь для некоторых классов схем (для которых известно, что дзета-функция имеет адекватное интегральное представление; в общем случае это лишь предполагается), в то время как дзета-функция схемы над $\mathbf{F}_q$ является рациональной функцией параметра $q^{-s} = T$, а для гладких собственных многообразий над $\mathbf{F}_q$ имеет очень простое явное выражение.

2. Вычисление конгруэнц - дзета-функции.

В этом и следующем параграфах мы будем считать, что X геометрически неприводимо, то есть $\overline{X}$ неприводимо. (чаще это свойство включают в определение многообразия, но вычисления предыдущего параграфа его не использовали).

Удобно вести все подсчеты в терминах первоначального определения и функции $Z(X,T)$. Выше мы уже вычислили $Z(\mathbf{A}^d_{\mathbf{F}_q},T) = \frac{1}{1-q^dT}$. Представив проективное пространство $\mathbf{P}^d_{\mathbf{F}_q}$ в виде несвязного объединения аффинных клеток, получаем $Z(\mathbf{P}^d_{\mathbf{F}_q},T) = \frac{1}{\prod\limits_{i=0}^{d}(1-q^iT)}$. Отметим, что над полем комплексных чисел классы этих клеток порождают сингулярные когомологии $\mathbf{P}^d$ (клетке коразмерности i соответствует группа $H^{2i}(\mathbf{P}^d(\mathbf{C}),\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$, а когомологии с нечетными номерами равны нулю). Следующая теорема, поэтому, не является неожиданной.

Теорема. Пусть $X/\mathbf{F}_q$ - гладкое собственное многообразие размерности d. Тогда

$$Z(X,T) = \frac{\prod\limits_{0<i<2d,2\nmid d}\det((1-Fr^*T)|H^i(\overline{X},\mathbf{Q}_l)}{\prod\limits_{0\le i\le 2d,2|d}\det((1-Fr^*T)|H^i(\overline{X},\mathbf{Q}_l)}$$

Здесь $\overline{X} = X \times_{\mathrm{spec}\,\mathbf{F}_q} \mathrm{spec}\,\overline{\mathbf{F}_q}$ (фактически мы уже расссматривали $\overline{X}$, когда подсчитыывали точки). Эндоморфизм Фробениуса Φ схемы $\overline{X}$ действует тождественно на схемных точках и возведением в q - ю степень на структурном пучке. Он представляется в виде $\Phi = Fr_X \times \sigma = (Fr_X \times Id) \cdot (Id \times \sigma)$, где Fr_X - эндоморфизм Фробениуса левого сомножителя, а σ -это топологическая образующая группы $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbf{F}_q}/\mathbf{F}_q)$, возводящая в q - ю степень константы из $\overline{\mathbf{F}_q}$. Тем самым $Fr_X \times Id$ - алгебраический автоморфизм $\overline{X}$, сохраняющий $\overline{k}$ - структуру; именно его мы обозначаем Fr (это т.н. "геометрический Фробениус", в то время как $Id \times \sigma$ - "арифметический Фробениус").

H^i - группы l-адических когомологий собственного над алгебраически замкнутым полем $\overline{\mathbf{F}}_q$ многообразия $\overline{X}$. Их известными науке свойствами мы будем пользоваться не стесняясь, пока эти свойства параллельны свойствам когомологий компактных топологических многообразий. Здесь l - простое число, отличное от характеристики поля $\mathbf{F}_q$. Все H^i - конечномерные векторные пространства над $\mathbf{Q}_l$. $\oplus_i H^i$ - кососкоммутативная ($b \cup a = (-1)^{\deg a \deg b} a \cup b$) градуированная алгебра. Оба Фробениуса - геометрический и арифметический - действуют на пространствах H^i как линейные преобразования. Поскольку чисто несепарабельный морфизм Φ действует тождественно не только на открытых по Зарискому подмножествах схемы $\overline{X}$ (что очевидно), но и, как несложно проверить, на этальных накрытиях, играющих роль открытых множеств в этальной топологии, а следовательно, и на когомологиях, эти линейные преобразования взаимно обратны. Это обстоятельство позволяет выразить действие группы $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbf{F}_q}/\mathbf{F}_q)$ на когомологиях $\overline{X}$ через действие геометрического Фробениуса, поэтому мы будем рассматривать $H^i(\overline{X})$ только как векторные пространства, пренебрегая структурой модуля над группой Галуа, что дает возможность максимально упростить формулировки перечисленных в следующем абзаце стандартных теорем.

Нам понадобятся отображение циклов коразмерности i в когомологии $cl: \ C^i(\overline{X}) \to H^{2i}(\overline{X})$, переводящее пересечение циклов в $\cup$ - произведение, формула Кюннета (канонический изоморфизм градуированных колец $H^*(\overline{X}, \mathbf{Q}_l) \otimes H^*(\overline{Y}, \mathbf{Q}_l) = H^*(\overline{X} \times \overline{Y}, \mathbf{Q}_l)$) и теорема двойственности Пуанкаре (спаривания $\cup : H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_l) \times H^{2d-i}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l) \to H^{2d}(\overline{X}, \mathbf{Q}_l) = \mathbf{Q}_l$ невырождены; последний изоморфизм задается формулой $cl(P) \mapsto 1$, где P - любая замкнутая точка).

Набросок доказательства теоремы.

Лемма 1. $\#X(\mathbf{F}_{q^n}) = (\Gamma_{Fr^n} \cdot \Delta_{\overline{X}})$.

Доказательство. В правой части, очевидно, стоит число неподвижных точек (с кратностями) автоморфизма Fr^n многообразия $\overline{X}$. Оператор DFr^n на касательном расслоении нулевой, так как Fr возводит координаты точек в q-ю степень, а оператор DId единичный, поэтому все точки пересечения графиков Id и Fr^n в $\overline{X}\times\overline{X}$ однократны. ■

Лемма 2 (формула следа Лефшеца). Пусть $\phi : \overline{X} \to \overline{X}$ - алгебраический морфизм, для графика которого Γ_ϕ в $\overline{X} \times \overline{X}$ определен индекс пересечения с диагональю $\Delta_{\overline{X}}$. Тогда $(\Gamma_\phi \cdot \Delta_{\overline{X}}) = \sum\limits_{i=0}^{2d}(-1)^i \mathrm{Tr}\,(\phi^*|H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_l))$.

Доказательство. Для любого морфизма $f : \overline{X} \to \overline{Y}$ собственных многообразий над $\overline{\mathbf{F}_q}$ обозначим $f_* : H^*(X) \to H^*(Y)$ линейный оператор, двойственный к f^* относительно двойственности Пуанкаре. Он, очевидно, сдвигает градуировку на $2(\dim Y - \dim X)$, и элементарно проверяется “формула проекции” $f_*(x \cup f^*y) = f_*(x) \cup y$.

Если π_1 и π_2 - проекции $\overline{X} \times \overline{X}$ на сомножители, то для любого эндоморфизма $\phi : \overline{X} \to \overline{X}$ и класса когомологий $h \in H^*(\overline{X})$ его обратный образ может быть вычислен по формуле $\phi^*(h) = (\pi_1)_*(cl(\Gamma_\phi) \cup \pi_2^*(h))$. Действительно, пусть $\phi_1 : \overline{X} \to \overline{X} \times \overline{X}$ - стандартное вложение графика морфизма ϕ, тогда легко проверяется, что $(\phi_1)_*(1 \in H^*(\overline{X})) = cl(\Gamma_\phi)$, поэтому $(\pi_1)_*(cl(\Gamma_\phi) \cup \pi_2^*(h)) = (\pi_1)_*((\phi_1)_*(1) \cup \pi_2^*(h)) =$(по формуле проекции)$(\pi_1)_*(\phi_1)_*(1 \cup \phi_1^*\pi_2^*(h)) =$(поскольку $\pi_1\phi_1 = Id$, а $\pi_2\phi_1 = \phi$) $\phi^*(h)$.

Выберем в каждом H^i базис $\{e_{i,r}\}$; пусть $\{f_{2d-i,s}\}$ - двойственный (относительно двойственности Пуанкаре) базис в H^{2d-i}, то есть $f_{2d-i,s} \cup e_{i,r} = \delta_{sr}$. Представим разложение Кюннета класса графика морфизма ϕ в виде $\sum\limits_{i,s} a_{i,s} \otimes f_{2d-i,s} \in \sum\limits_i H^i(\overline{X}) \otimes H^{2d-i}(\overline{X})$, где $a_{i,s}$ - какие-то элементы $H^i(\overline{X})$, тогда $\mathrm{Cl}\,(\Gamma_\phi) = \sum\limits_{i,s} \pi_1^*(a_{i,s}) \cup \pi_2^*(f_{2d-i,s}) \in H^{2d}(\overline{X}\times\overline{X})$. Для любого базисного элемента $e_{i_0,r}$ по предыдущему абзацу, примененному к $h = e_{i_0,r}$, имеем $\phi^*(e_{i_0,r}) = (\pi_1)_*((\sum\limits_{i,s} a_{i,s} \otimes f_{2d-i,s}) \cup (1 \otimes e_{i_0,r}))) = \sum\limits_{i,s}(\pi_1)_*(a_{i,s} \otimes (f_{2d-i,s} \cup e_{i_0,r})) = \sum\limits_{i,s}(\pi_1)_*(\pi_1^*(a_{i,s}) \cup \pi_2^*(f_{2d-i,s} \cup e_{i_0,r}))$. По формуле проекции с точностью до знака $(\pi_1)_*(\pi_1^*(a_{i,s}) \cup \pi_2^*(f_{2d-i,s} \cup e_{i_0,r})) = a_{i,s} \cup (\pi_1)_*\pi_2^*(f_{2d-i,s} \cup e_{i_0,r})$. Для того, чтобы этот член суммы мог ооказаться ненулевым, необходимо, во-первых, чтобы градуировка элемента $f_{2d-i,s} \cup e_{i_0,r}$ равнялась в точности $2d$, иначе либо он сам (если градуировка превосходит $2d$), либо $(\pi_1)_*\pi_2^*$ от него (если градуировка меньше, чем $2d$ - напомним, что π_2^* сохраняет градуировку, а $(\pi_1)_*$ уменьшает её на величину $2d$) равны нулю автоматически, поэтому $i = i_0$. а во-вторых, чтобы $r = s$ (из-за двойственности базисов). Применяя формулу проекции, получаем в итоге $\phi^*(e_{i_0,r}) = a_{i_0,r}$. Мы вычислили формулу разложения Кюннета класса графика морфизма ϕ, она применима и к тождественному морфизму, то есть к диагонали.

Окончательно имеем: $(\Gamma_\phi \cdot \Delta) = cl(\Gamma_\phi) \cup cl(\Delta) = (\sum\limits_{i,r} \phi^*(e_{i,r}) \otimes f_{2d-i,r}) \cup (\sum\limits_{j,s} e_{j,s} \otimes f_{2d-j,s}) = \sum\limits_{i,j,r,s} (-1)^{j(2d-j)} (\phi^*(e_{i,r}) \cup f_{2d-j,s}) \otimes (f_{2d-i,r} \cup e_{j,s}) =$ (поскольку градуировка каждого из сомножителей обязана не превосходить $2d$ и базис $f_{j,s}$ двойствен к базису $e_{i,r}$) $\sum\limits_j (-1)^{j(2d-j)} (\phi^*(e_{j,s}) \cup f_{2d-j,s}) = \sum\limits_j (-1)^j$ (сумма диагональных элементов матрицы оператора ϕ^* в базисе $e_{j,s}$ пространства H^j) ■

Лемма 3. Пусть ψ - эндоморфизм конечномерного векторного пространства V. Тогда $\log(\det(1 - \psi T \mid V)^{-1}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{Tr}(\psi^n \mid V) \frac{T^n}{n}$.

Доказательство. Для одномерного пространства формула очевидна, а в общем случае приведем (возможно, расширив поле) матрицу оператора ψ к треугольному виду ■

Теорема очевидно следует из этих трех лемм ■

Комментарии к теореме.

1. Свободный член каждого из сомножителей в числителе и в знаменателе равен 1, а степень - размерности соответствующего пространства H^i.

2. Fr^*, как и любой морфизм, тривиально действует на H^0, поэтому крайний левый полином в знаменателе равен $1-T$. Пространство H^{2d} порождено классом замкнутой точки $cl(P)$, при этом $Fr^*(cl(P)) = q^d cl(Q)$, где Q - единственный прообраз точки P относительно чисто несепарабельного морфизма Fr, степень которого равна q^d, поскольку он возводит в q-ю степень каждую из d координат. Здесь нет никакого противоречия с предыдущими рассмотрениями: график функции $y = Fr(x)$ горизонтален, как и график константы $y = P$, поэтому они сильно касаются друг друга в единственной точке пересечения, в то время как с графиком функции $y = x$, т.е. с диагональю, наш график во всех $\#(X(\mathbf{F}_q))$ точках пересекается трансверсально. Таким образом, на H^{2d} Fr^* действует умножением на q^d, и крайний правый полином в знаменателе равен $1 - q^d T$.

3. Если сократить все общие множители в числителе и знаменателе, то числитель и знаменатель получившейся дроби будут полиномами с целыми рациональными коэффициентами. Действительно, мы знаем, что $Z(X,T)$ - степенной ряд с целыми коэффициентами и свободным членом 1. Условие на коэффициенты степенного ряда $\sum a_i T^i$, необходимое и достаточное для того, чтобы этот ряд представлялся в виде рациональной дроби, универсально (т.е не зависит от того, элементами какого поля мы эти коэффициенты считаем). Скажем, знаменатель дроби отсутствует $\Leftrightarrow$ начиная с какого-то места, $a_i = 0$; знаменатель имеет степень 1 $\Leftrightarrow$ начиная с какого-то места, a_i составляют геометрическую прогрессию и т.п (нетрудно сформулировать и общее условие). Поэтому числитель и знаменатель нашей дроби лежат в $\mathbf{Q}[T]$ и не зависят от l. Каково бы ни было простое число l_1, если бы какой-то из коэффициентов числителя не был l_1 -цел, то это означало бы, что у числителя есть корень в $\overline{\mathbf{Q}_{l_1}}$,принадлежащий максимальному идеалу $\mathcal{O}_{\overline{\mathbf{Q}_{l_1}}}$ (напомним, что свободный член числителя равен 1), а это означает, что при подстановке этого корня в ряд $Z(X,T)$ последний не может сойтись к нулю (ибо начинается с 1 и имеет целые коэффициенты) - противоречие. Рассматривая $Z(X,T)^{-1}$, получаем аналогичное утверждение для знаменателя.

4. На самом деле сократить ничего нельзя, а значит, сами полиномы $\det((1 - Fr^*T)|H^i(\overline{X},\mathbf{Q}_l)$ имеют целые коэффициенты и не зависят от l. Это следует из конгруэнц-аналога гипотезы Римана, который был доказан Делинем в 1970-х: собственные значения оператора Fr^* на $H^i(\overline{X},\mathbf{Q}_l)$ (которые обратны корням полинома с номером i) суть алгебраические над $\mathbf{Q}$ числа, и если вложить такое число в $\mathbf{C}$, то все его сопряженные над $\mathbf{Q}$ будут иметь абсолютную величину $q^{i/2}$. Уместность употребления выражения "гипотеза Римана" следует из того, что в терминах переменной $s(T = q^{-s})$, вторая половина этого утверждения означает, что вещественные части всех нулей (соответственно, полюсов) функции $\zeta(X,s)$ суть полуцелые (соответственно, целые) числа, умещающиеся в диапазон $0 \le s \le d$ (так называемая "критическая полоса"). Если пространство $H^i(\overline{X})$ нулевое, то нули (при нечетном i) либо полюса (при четном i) с вещественной частью $i/2$ отсутствуют. Если считать процитированное выше утверждение доказанным, то в полном списке алгебраических чисел, являющихся корнями всех полиномов $\det((1 - Fr^*T)|H^i(\overline{X},\mathbf{Q}_l)$, те, что относятся к полиному с номером i, идентифицируются по своей (комплексной) абсолютной величине. Поэтому дробь в формулировке основной теоремы несократима, её числитель и знаменатель, как следует из предыдущего пункта, имеют целые коэффициенты, а значит, как полный список корней, так и его подмножества, относящиеся к каждому i, Gal $(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ - инвариантны. Это доказывает утверждение в начале пункта.

Стоит отметить, что "гипотеза Римана" значительно проще доказывается для проективных многообразий X, чем для всех гладких собственных многообразий (доказательство в последнем случае появилось пятью годами позже).

5. Пользуясь теорией когомологий с компактными носителями, формулировку основной теоремы можно слегка изменить, так, что она будет справедлива и для не обязательно собственных многоообразий.

6. Рациональность функции $Z(X,T)$ можно доказать для произвольных схем конечного типа над $\mathbf{F}_q$ вообще без обращения к когомологиям: именно это доказательство, принадлежащее Дворку, было исторически первым.

3. Функциональное уравнение конгруэнц - дзета-функции

Теорема. Для любого многообразия $X/\mathbf{F}_q$, удовлетворяющего условиям предыдущей теоремы, $Z(X, \frac{1}{q^d T}) = \pm q^{d\chi/2} T^\chi Z(X,T)$, где $\chi = (\Delta \cdot \Delta)$.

Доказательство. Положим $\det((1 - Fr^* T)|H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_l) = P_i(T)$. Тогда $P_i(T) = \prod\limits_{r=1}^{h_i}(1 - \alpha_{i,r}T)$, где $\alpha_{i,r}$ - собственные значения Fr^* на H^i, а $h_i = \dim H^i$. По теореме двойственности Пуанкаре $P_{2d-i}(T) = \prod\limits_{r=1}^{h_i}(1 - \frac{q^d T}{\alpha_{i,r}})$ (напомним, что на $H^{2d} Fr^*$ действует умножением на q^d).

Вычислим $P_i(\frac{1}{q^d T}) = \prod\limits_{r=1}^{h_i}(1 - \frac{\alpha_{i.r}}{q^d T}) = \frac{(-1)^{h_i}\prod_{r=1}^{h_i}\alpha_{i,r}}{T^{h_i}q^{dh_i}} P_{2d-i}(T)$. Соответственно, $Z(X, \frac{1}{q^d T}) = \prod\limits_i P_i(\frac{1}{q^d T})^{(-1)^{i+1}} = \prod\limits_i \left(\frac{(-1)^{h_i}\prod_{r=1}^{h_i}\alpha_{i,r}}{T^{h_i}q^{dh_i}}\right)^{(-1)^{i+1}} \prod\limits_i P_{2d-i}(T)^{(-1)^{i+1}} = Z(X,T)\prod\limits_i \left(\frac{(-1)^{h_i}\prod_{r=1}^{h_i}\alpha_{i,r}}{T^{h_i}q^{dh_i}}\right)^{(-1)^{i+1}} = Z(X,T)(-1)^\chi T^\chi q^{d\chi/2} \mathrm{sgn}\,(\det(Fr^*|H^d)$ (при подсчете мы учли, что $\sum\limits_i (-1)^i h_i = \chi$, что $h_i = h_{2d-i}$, что $(-1)^i = (-1)^{2d-i}$ и что $\prod\limits_{r=1}^{h_i}\alpha_{i,r}\prod\limits_{r=1}^{h_{2d-i}}\alpha_{2d-i,r} = q^{dh_i}$). Дополнительный знак в конце отражает то обстоятельство, что вместо $\prod\limits_{r=1}^{h_d}\alpha_{d,r} = \det(Fr^*|H^d)$ мы учли корень квадратный из квадрата этой величины.

На самом деле, выражение для знака $\epsilon(X) = (-1)^\chi \mathrm{sgn}\,(\det(Fr^*|H^d)$ в функциональном уравнении можно ещё упростить. Во-первых, из-за двойственности Пуанкаре четность χ совпадает с четностью h_d. Из неё же следует, что существует перестановка $\pi(r)$ набора $\{\alpha_{d,r}\}$ такая, что $\forall r\, \alpha_{d,r}\alpha_{d,\pi(r)} = q^d$. Если размерность $\dim X = d$ нечетна, то $\cup$ - произведение - невырожденная альтернированная форма на H^d, значит, h_d четно, и указанная перестановка не оставляет ни один из элементов набора на месте, а значит, они разбиваются на пары, в каждой паре произведение равно q^d, и детерминант положителен. Следовательно, в этом случае $\epsilon = 1$. Если же $\dim X = d$ четна, то некоторые элементы набора могут оставаться на месте. Это означает, что соответствуюшие $\alpha_{d,r}$ равны в точности $\sqrt{q^d}$ или $-\sqrt{q^d}$. Тем самым, в этом случае $\epsilon(X) = -1 \Leftrightarrow (-1)^{h_d}\prod_{r=1}^{h_d}(\alpha_{d,r}) = -q^{dh_d/2} \Leftrightarrow \prod_{r=1}^{h_d}(-\alpha_{d,r}) = -q^{dh_d/2} \Leftrightarrow \ \#(r \mid \alpha_{d,r} = \sqrt{q^d})$ нечетно. ■

Если доказанную формулу перевести в термины параметра s, то она примет вид $\zeta(X, d-s) = \epsilon(X)q^{\chi(d/2-s)}\zeta(X,s)$ или же $\zeta(X,s) = \epsilon(X)q^{\chi(s-d/2)}\zeta(X,d-s)$. Эту формулу можно ещё упростить, положив $\xi(X,s) \stackrel{\text{def}}{=} q^{-s\chi/2}\zeta(s)$. Тогда $\xi(d-s) = \epsilon(X)\xi(s)$. Именно последние две формулы мы будем обобщать на дзета-функции арифметических схем, начиная с дзета-функции Римана.

Поскольку их доказательство основано на теореме двойственности Пуанкаре для l - адических когомологий многообразия $\overline{X}$, шансы на то, что его удастся обобщить, невелики. Однако в случае, когда X - кривая, её дзета-функцию можно вычислить вообще без обращения к $\overline{X}$, используя лишь когомологии когерентных пучков в топологии Зариского и теорему Римана-Роха.

Пусть $X/\mathbf{F}_q$ - гладкая проективная кривая рода $g \geq 1$ (дзета-функцию $\mathbf{P}_1$ мы уже вычислили ранее). Тогда $Z(X,T) = \sum_{D\geq 0} T^{\deg D} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k(\#(D \geq 0 \mid \deg D = k)) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \sum_{C,\ \deg C = k}(\#(D \geq 0, D \in C))$. Здесь D пробегают определенные над $\mathbf{F}_q$ дивизоры на X, условие $D \geq 0$ означает, что дивизор эффективен, C пробегают классы дивизоров относительно рациональной эквивалентности. Степень дивизора $D = \sum a_i(x_i)$, где x_i суть замкнутые точки X, есть, по определению, $\deg D = \sum a_i[k(x_i) : \mathbf{F}_q]$

Каков бы ни был класс дивизоров C, входящие в него эффективные дивизоры суть точки проективного пространства над $\mathbf{F}_q$, являющегося проективизацией векторного пространства $L(D) = H^0(X, \mathcal{O}(D))$, где D - какой-нибудь дивизор из класса C. Размерность $L(D)$ зависит только от C; обозначим её $l(C)$.

Тогда $\forall C\ \ \#(D\geq 0,\ \ D\in C)=\frac{q^{l(C)}-1}{q-1}$.

По теореме Римана-Роха (которая справедлива над произвольным основным полем, причем доказательство для случая, когда это поле совершенно, почти не отличается от доказательства для случая, когда оно алгебраически замкнуто) $l(C)-l(K-C)=1-g+\deg C$, где K - канонический класс.

Если $\deg C=k>2g-2$, то класс C неспециален ($\deg(K-C)<0\Rightarrow l(K-C)=0$), значит, $l(C)=1-g+k$, и коэффициент при T^k в Z_2 равен $h(k)\frac{q^{1-g+k}-1}{q-1}$, где $h(k)$ - число классов определенных над $\mathbf{F}_q$ дивизоров степени k. Пусть $\mathbf{J}(X)$ - якобиан кривой X, тогда по определению $h(0)=\#(\mathbf{J}(X)(\mathbf{F}_q))$. Легко проверить, что $\forall k\ \ h(k)=h(0)$ (например, это следует из теоремы Ленга о тривиальности однородных пространств над связной алгебраической группой над $\mathbf{F}_q$); так что, можно использовать обозначение h, и окончательно коэффициент равен
$h\frac{q^{1-g+k}}{q-1}-\frac{h}{q-1}$.

Если же $0\leq k\leq 2g-2$, то коэффициент при T^k равен $\sum\limits_{C,\ \deg C=k}\frac{q^{l(C)}-1}{q-1}=\sum\limits_{C,\ \deg C=k}\frac{q^{l(C)}}{q-1}-\frac{h}{q-1}$. В этой формуле $l(C)$ зависит уже не только от степени класса дивизоров, поскольку в формуле Римана-Роха индекс специальности $l(K-C)$ может оказаться ненулевым.

Разобьем $Z(X,T)$ на два слагаемых: пусть Z_1' есть конечная сумма, объединяющая члены с $0\leq k\leq 2g-2$, а Z_2' - остальные члены. Для того, чтобы функциональное уравнение можно было проверить для каждого слагаемого в отдельности, перенесем $-\sum\limits_{k=0}^{2g-2}\frac{h}{q-1}$ из первой суммы во вторую. В результате получим формулу $Z(X,T)=Z_1(X,T)+Z_2(X,T)$, где $Z_1(X,T)=\frac{1}{q-1}\sum\limits_{k=0}^{2g-2}T^k\sum\limits_{C,\ \deg C=k}q^{l(C)}$, а $Z_2(T)=\frac{h}{q-1}\left(\frac{q^gT^{2g-1}}{1-qT}-\frac{1}{1-T}\right)$.

Из этой формулы видно, что $Z(X,T)$ - рациональная дробь со знаменателем $(1-T)(1-qT)$, числитель которой - полином степени не более $2g$. Напомним, что g - это размерность якобиана $\mathbf{J}(X)$, и что размерность $H^1(\overline{X},\mathbf{Q}_l)$, как векторного пространства над $\mathbf{Q}_l$, как раз равна $2g$. Последнее утверждение проще всего проверить, написав точную последовательность Куммера пучков в этальной топологии схемы $\overline{X}:0\to\mu_{l^n}\to\mathbf{G}_m\overset{x\mapsto x^{l^n}}{\to}\mathbf{G}_m\to 0$. Отвечающая ей последовательность когомологий задает изоморфизм $H^1(\overline{X},\mu_{l^n})=(\mathrm{Pic}\,(\overline{X}))_{l^n}$. При этом $H^1(\overline{X},\mu_{l^n})=H^1(\overline{X},\mathbf{Z}/(l^n))$

(если пренебречь действием группы Галуа), а $(\mathrm{Pic}\,(\overline{X}))_{l^n} = (\mathrm{Pic}\,_0(\overline{X}))_{l^n} = (\mathbf{J}(\overline{X}))_{l^n}$. Это дает изоморфизм между $H^1(\overline{X}, \mathbf{Q}_l)$ и $\mathbf{Q}_l$ - пространством, отвечающим модулю Тейта g - мерного абелева многообразия $\mathbf{J}(\overline{X})$; последнее, как известно, $2g$ -мерно.

Элементарное вычисление показывает, что $Z_2(X, \frac{1}{qT}) = q^{1-g}T^{2-2g}Z_2(T)$. Для того, чтобы проверить, что Z_1 удовлетворяет такому же соотношению, достаточно заметить, что операция $C \mapsto K - C$ задает биекцию между классами дивизоров степени k и степени $2g-2-k$, после чего применить теорему Римана-Роха. Из предыдущего замечания следует, что эйлерова характеристика χ из первого доказательства равна $2-2g$. Знак в формуле отсутствует, как и должен, поскольку $\dim X = 1$ - нечетна.

Имеет смысл отметить, что перенос $\left(-\sum\limits_{k=0}^{2g-2} \frac{h}{q-1}T^k\right)$ слева направо - это не просто трюк. Теорема Римана-Роха впрямую применяется к размерностям пространств $L(D)$ и к количествам элементов в них $q^{l(C)}$, а не к количествам $\frac{q^{l(C)}-1}{q-1}$ эффективных дивизоров в соответствующих классах. Чтобы из нее следовало функциональное уравнение, мы должны бы были иметь дело с "функцией" $Z_0(X,T) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} T^k \sum\limits_{C,\ \deg C=k} q^{l(C)}$, для которой искомое функциональное уравнение выполнено для каждой пары членов внешней суммы с номерами k и $(2g-2-k)$. Формально $Z(X,T) = \frac{1}{q-1}(Z_0(X,T) - h\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} T^k) = \frac{1}{q-1}Z_0(X,T)$ (ибо "сумма" ряда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} T^k$ должна бы равняться нулю, поскольку сумма членов с отрицательными номерами есть $\frac{1}{T-1}$, а сумма членов с неотрицательными номерами есть $\frac{1}{1-T}$), но содержательного смысла это соотношение не имеет, поскольку ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} T^k$ (а вместе с ним и ряд $Z_0(X,T)$) не может оказаться сходящимся, если мы станем вместо T подставлять числа из какого-нибудь поля с абсолютным значением. Однако, если заменить расходящуюся часть ряда Z_0 (отвечающую отрицательным значениям k) на рациональную функцию $h\frac{1}{T-1}$ (отметим, что при $\deg D < 0$ пространство $L(D)$ состоит только из нуля, а значит, $l(C) = 0$ и $q^{l(C)} = 1$) и аналогично поступить с расходящейся частью ряда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} T^k$, то все вычисления приобретут смысл. Функция Z_0 разобьётся на три слагаемых: $\mathbf{Z}_0(X,T) = h\frac{1}{T-1} + \sum\limits_{k=0}^{2g-2} T^k \sum\limits_{C,\ \deg C=k} q^{l(C)} + \sum\limits_{k=2g-1}^{\infty} T^k \sum\limits_{C,\ \deg C=k} q^{l(C)}$; функциональное уравнение будет выполнено для среднего слагаемого (по теореме Римана-Роха) и для пары крайних (тут впрямую сослаться на теорему Римана-Роха не получится из-за обсуждавшихся расходимостей, зато обе функции рациональны, и функциональное уравнение может быть проверено непосредственно). Соотношение $Z(X,T) = \frac{1}{q-1} Z_0(X,T)$ будет честно выполняться, а разбиение на две суммы, каждая из которых отдельно удовлетворяет функциональному уравнению - это, с точностью до умножения на $(q-1)$, то же разбиение, которое было выше получено путём переноса для функции $Z(X,T)$.

В отличие от предыдущего, приведенное доказательство функционального уравнения может быть перенесено на дзета - функции одномерных арифметических схем . Одновременно для них удается получить мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость. К сожалению, гипотеза Римана в этот контекст не укладывается.

4. Дзета - функция Римана.

$\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod\limits_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$.

Дзета-функция Римана является дзета-функцией (в смысле предыдущего определения) одномерной схемы $\operatorname{spec} \mathbf{Z}$. Для того, чтобы свойства последней начали напоминать свойства собственной кривой над полем, к ней, как известно, нужно добавить "бесконечную" точку и перейти от дивизоров к дивизорам Аракелова. Напомним, что группа дивизоров Аракелова поля $\mathbf{Q}$ имеет вид $\overline{\operatorname{Div}}_{\mathbf{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_p \mathbf{Z} + \mathbf{R}$. Степень дивизора Аракелова D с компонентами $\{d_p, d_\infty\}$ равна, по определению, $\deg(D) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_p d_p \log p + d_\infty$, а его абсолютная норма $N(D) = \exp(\deg D)$. Вместо абсолютной нормы часто удобно использовать содержание $||D|| = (N(D))^{-1}$. Каждому рациональному числу $a \in \mathbf{Q}$ соответствует главный дивизор (a) с компонентами $\{\mathrm{v}_p(a), -\log|a|\}$, его степень равна нулю, а абсолютная норма и содержание - единице.

Настоящей дзета-функцией "собственной модели поля $\mathbf{Q}$" естественно назвать сумму $\xi(s) = \sum\limits_{D \geq 0} (N(D))^{-s} = \sum\limits_{D \geq 0} ||D||^s$. Чтобы это выражение имело смысл, нужно договориться, что означает суммирование по недискретному множеству дивизоров Аракелова и какие из них считать эффективными $(D \geq 0)$.

Сумму можно заменить (несобственным) интегралом $\int\limits_{D \in \overline{\operatorname{Div}}_{\mathbf{Q}}, D \geq 0} ||D||^s d\mu$, в котором мера μ есть произведение мер на сомножителях: на каждом $\mathbf{Z}$ это сумма единичных δ - мер (так, что интегрирование есть просто суммирование), а на $\mathbf{R}$ - обычная мера

Лебега. Определение эффективности - задача более тонкая. Конечно, можно было бы считать, что дивизор Аракелова эффективен в том и только том случае, когда все его компоненты неотрицательны, но это определение оказывается слишком грубым. Мы поступим так: вместо двоичной оппозиции D эффективен/не эффективен введем уровень эффективности $E(D) \stackrel{\text{def}}{=} E_\infty(D)\prod E_p(D)$. Функции E_p будут ступеньками ($E_p(D) = 1$ если $d_p \geq 0$, 0 иначе), так что условие эффективности в конечных точках останется прежним, а функцию E_∞ мы пока что определять не будем, считая лишь, что это непрерывная монотонно возрастающая функция от d_∞, такая, что $E_\infty(-\infty) = 0$, а $E_\infty(+\infty) = 1$. Теперь мы можем определить $\int\limits_{D\in\overline{\mathrm{Div}}_{\mathbf{Q}}, D\geq 0} ||D||^s d\mu \stackrel{\text{def}}{=}$ $\int\limits_{D\in\overline{\mathrm{Div}}_{\mathbf{Q}}} E(D)||D||^s d\mu.$

Чтобы довести вычисление до конца, рассмотрим отображение $\pi : \overline{\mathrm{Div}}_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{R}^*_{>0}$; $D \mapsto ||D||$. Тогда $\xi(s) = \int_0^\infty t^s(\int\limits_{D\in\overline{\mathrm{Div}}_{\mathbf{Q}};\ ||D||=t} E(D)d\mu_t)\frac{dt}{t}$. Любой дивизор Аракелова D с содержанием, равным t, однозначно определяется своей финитной частью (т.е координатами $\{d_p\}$, и мера μ_t - это та же дискретная мера, что мы использовали в качестве сомножителя при определении меры μ. Далее, все дивизоры Аракелова поля $\mathbf{Q}$ с содержанием t принадлежат к одному классу, т.е имеют вид $D_{a,t} = \{d_p = \mathrm{v}_p(a), d_\infty = -\log t - \log(|a|\}$, где a пробегает все положительные рациональные числа. Кроме того, если число a не является целым, то $E(D_{a,t}) = 0$, а если a цело, то $E(D_{a,t}) = E_\infty(d_\infty)$ (по определению функции E). Всё это означает, что, внутренний интеграл можно переписать в виде суммы, и имеет место формула

$\xi(s) = \int_0^\infty t^s(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_\infty(-\log t - \log n)\frac{dt}{t}$.

Поменяв местами суммирование и интегрирование, получаем

$\xi(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty t^s(E_\infty(-\log(nt))\frac{dt}{t} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty t^s(E_\infty(-\log(nt))\frac{dt}{t} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^\infty \frac{y^s}{n^s}E_\infty(-\log(y))\frac{dy}{y} =$ $\zeta(s)\int_0^\infty E_\infty(-\log(y)y^s\frac{dy}{y}$

Предположим, что мы выбрали бы в качестве функции E_∞ ступеньку: $E_\infty(x) = 0$ если $x < 0$ и $E_\infty(x) = 1$ если $x \geq 0$. Тогда $\int_0^\infty E_\infty(-\log(y)y^s\frac{dy}{y} = \int_0^1 y^s\frac{dy}{y} = \frac{1}{s}$.

Аналитические свойства функции $\xi(s) = \frac{\zeta(s)}{s}$ напоминают то, что нужно; например, если, забегая вперед, считать известным, что $\zeta(s)$ мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость с единственным простым полюсом в $s = 1$ и не обращается в нуль в $s = 0$, то такая $\xi(s)$ имела бы два симметричных относительно замены $s \leftrightarrow 1 - s$ полюса. Но для того, чтобы можно было доказать, что $\xi(s)$ продолжается мероморфно на $\mathbf{C}$ и удовлетворяет функциональному уравнению, требуется более рафинированный выбор функции E_∞.

Чтобы понять, как должна выглядеть компонента E_∞, чтобы шансы на функциональное уравнение для $\xi(s)$ были неплохими, вернемся к формуле, из которой не выделен сомножитель $\zeta(s)$. Будем использовать мультипликативный вид аргумента, т.е считать, что "бесконечный" сомножитель уровня эффективности дивизора Аракелова зависит не от степени, а от содержания: положим $F_\infty(t) \stackrel{\text{def}}{=} E_\infty(-\log t)$. Скажем, рассматривавшейся выше ступенчатой E_∞ будет соответствовать функция F_∞, равная 1 при $t \leq 1$ и 0 при $t > 1$. Тогда $\xi(s) = \int_0^\infty t^s(\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_\infty(nt))\frac{dt}{t}$. Введем новое обозначение $\Phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_\infty(nt))$ (для ступенчатой E_∞ имеем $\Phi(t) = [t^{-1}]$) и окончательно получим $\xi(s) = \int_0^\infty \Phi(t)t^s\frac{dt}{t}$. В получившейся формуле легко узнать так называемое преобразование Меллина, и мы сейчас увидим, что функциональное уравнение для функции $\xi(s)$ может быть получено из функционального уравнения для функции $\Phi(t)$. С учетом вычислений предыдущего параграфа, последнее будет играть роль теоремы Римана-Роха для собственной модели поля $\mathbf{Q}$ (точнее, совокупности теорем Римана-Роха, примененных ко всем классам дивизоров данной степени), а интегрирование по $t^s\frac{dt}{t}$ выполнит роль разложения в степенной ряд по T^k.

4. Преобразование Меллина.

Преобразование Меллина ставит в соответствие функции $f(t)$ функцию $\mathcal{M}f(s) = \int_0^\infty f(t)t^s\frac{dt}{t}$. Область определения функции $\mathcal{M}f$ представляет собой вертикальную полосу в $\mathbf{C}$, которая может также быть пустой или бесконечной как вправо, так и влево, и точный вид которой зависит от характера роста/убывания функции f в нуле и в бесконечности. Оно впрямую связано с двусторонним преобразованием Лапласа ($\mathcal{B}f(s) = \mathcal{M}(f\circ(-\log))(s)$ и преобразованием Фурье ($\mathcal{F}f(s) = \mathcal{M}(f\circ(-\log))(-is)$) и отличается от них мультипликативной, а не аддитивной записью аргумента функции f. Мы уже несколько раз переходили от t к $-\log t$ и обратно, так что выбор именно преобразования Меллина - это, скорее, дань традиции.

Прежде, чем сформулировать точную теорему (включающую аналитические условия, гарантирующие корректность наших вычислений), установим эмпирически связь между функциональными уравнениями для функций f и $\mathcal{M}f$. Пусть $c \neq 0$ - комплексное число, $\delta > 0$ и d - вещественные числа, и пусть функции f и g связаны функциональным уравнением вида $f(\frac{\delta}{t}) = ct^d g(t)$. Тогда их преобразования Меллина, в свою очередь, удовлетворяют функциональному уравнению $\mathcal{M}f(s) = c\delta^s \mathcal{M}g(d-s)$ (проверяется элементарной заменой переменной интегрирования).

Эта эмпирическая связь является двусторонней: обратное преобразование Меллина $\mathcal{M}^{-1}\phi(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{r_0-i\infty}^{r_0+i\infty} x^{-s}\phi(s)ds$, оправдывающее свое название при некоторых аналитических условиях, которых мы сейчас не будем касаться, позволяет восстановить функциональное уравнение для исходной функции по функциональному уравнению для её преобразования Меллина.

В реальной жизни интересующие нас интегралы могут расходиться (мы уже встретились с этим явлением, когда доказывали функциональное уравнение для конгруэнц - дзета-функции кривой методом Римана-Роха). Поэтому мы докажем теорему в расширенном контексте.

Теорема. Пусть $f, g : \mathbf{R}^*_{>0} \to \mathbf{C}$, - непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $f(y) = a_0 + O(e^{-\alpha y^\beta})$, $g(y) = b_0 + O(e^{-\alpha y^\beta})$, где α и β - какие-то положительные константы. Положим $L(f,s) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty (f(t) - a_0)t^s \frac{dt}{t} = \mathcal{M}(f - a_0)(s)$ и аналогично для g (к самим функциям f и g преобразование Меллина неприменимо, поскольку они не обязаны убывать на бесконечности). Предположим, что для некоторых $c \in \mathbf{C}^*$, вещественных $\delta > 0$ и $d > 0$ (d на этот раз тоже положительно) выполнено функциональное уравнение $f(\frac{\delta}{t}) = ct^d g(t)$. Тогда

1) Интегралы $L(f,s)$ и $L(g,s)$ абсолютно и равномерно на компактах сходятся при $\Re(s) > d$ и мероморфно продолжаются на $\mathbf{C}$ с возможными полюсами только в $s = 0$ и $s = d$.
2) $\operatorname{res}_{s=0} L(f,s) = -a_0$; $\operatorname{res}_{s=d} L(f,s) = c\delta^d b_0$; $\operatorname{res}_{s=0} L(g,s) = -b_0$; $\operatorname{res}_{s=d} L(g,s) = c^{-1}a_0$;
3)$L(f,s) = c\delta^s L(g, d-s)$.

Доказательство. Разобьем $L(f,s)$ в сумму интегралов $\int_0^{\sqrt{\delta}}$ и $\int_{\sqrt{\delta}}^\infty$ Функция $f - a_0$ при $t \geq \sqrt{\delta}$ подынтегральное выражение убывает быстрее, чем любая степень t, поэтому если s лежит внутри вертикальной полосы, то подынтегральное выражение ограничено сверху, например, функцией вида Ct^{-2}, где C - не зависящая от s константа. Поэтому второй интеграл сходится абсолютно и равномерно в вертикальных полосах. Для преобразования первого интеграла воспользуемся функциональным уравнением. Замена $t \leftrightarrow \frac{\delta}{t}$ и функциональное уравнение для f и g дают $\int_0^{\sqrt{\delta}} (f(t) - a_0)t^s \frac{dt}{t} =$

$-a_0\frac{t^s}{s}|_0^{\sqrt{\delta}} + c\int_{\sqrt{\delta}}^{\infty} f(\frac{\delta}{t})(\frac{\delta}{t})^s\frac{dt}{t} = -a_0\frac{\delta^{s/2}}{s} + c\delta^s\int_{\sqrt{\delta}}^{\infty} g(t)t^{d-s}\frac{dt}{t} = -a_0\frac{\delta^{s/2}}{s} + c\delta^s\int_{\sqrt{\delta}}^{\infty} b_o t^{d-s}\frac{dt}{t} + c\delta^s\int_{\sqrt{\delta}}^{\infty}(g(t)-b_0)t^{d-s}\frac{dt}{t}$. Ограничимся случаем $s > d$; тогда средний интеграл в этом выражении сходится и равен $cb_0\delta^{d/2}\frac{\delta^{s/2}}{s-d}$. Окончательно при $s > d$ получаем: $L(f,s) = -a_0\frac{\delta^{s/2}}{s} + cb_0\delta^{d/2}\frac{\delta^{s/2}}{s-d} + \int_{\sqrt{\delta}}^{\infty}(f(t)-a_0)t^s\frac{dt}{t} + c\delta^s\int_{\sqrt{\delta}}^{\infty}(g(t)-b_0)t^{d-s}\frac{dt}{t} \stackrel{\text{def}}{=} R(f,s) + I(f,s)$. Интегралы, составляющие $I(f,s)$, как мы уже видели, при любом $s \in \mathbf{C}$ сходятся абсолютно, и притом равномерно в вертикальных полосах, поэтому $I(f,s)$ - целая функция. $R(f,s)$ - произведение рациональной функции на экспоненту. Поэтому полученное нами выражение дает мероморфное продолжение $L(f,s)$ на всю комплексную плоскость с полюсами лишь в $s = 0$ (если $a_0 \neq 0$) и в $s = d$ (если $b_0 \neq 0$).

Аналогичное вычисление можно проделать и для $L(g,s)$ - в ответе достаточно поменять f, a_0 и c на g, b_0 и $c^{-1}\delta^{-d}$. Рутинная проверка показывает, что функциональное уравнение из п.3 теоремы выполнено по отдельности для $R(f,s)$ и $R(g,s)$, а также для $I(f,s)$ и $I(g,s)$ ■

Нелишне сравнить эту теорему с приведенным выше доказательством функционального уравнения для конгруэнц - дзета-функции кривой X методом Римана-Роха. Интегрированию по $t^s\frac{dt}{t}$ соответствует суммирование по T^k. Когда степень класса дивизоров $k = \deg C$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. переменная $t = q^{-k}$, соответствующая содержанию $||D||$ дивизоров из класса C, убывает от $+\infty$ до 0. "Область неспециальности" $k > 2g-2$ соответствует пределам интегрирования $0 < t < q^{2-2g}$, прочие дивизоры положительной степени отвечают пределам $q^{2g-2} < t < 1$, а дивизоры отрицательной степени - промежутку $1 < t < \infty$.

Теорема Римана-Роха связывает размерности пространств $L(D)$ и $L(K-D)$. Эти размерности зависят только от класса дивизоров C, и имеет место формула $l(K-C) = l(C) - \deg C - \chi/2$, где $\chi = 2-2g$ - степень канонического класса, взятая с обратным знаком. В мультипликативной форме теорема выглядит как $q^{l(K-C)} = q^{l(C)}q^{-\deg C}q^{-\chi/2}$. Просуммируем эту формулу по всем классам дивизоров C заданной степени: положим $\psi(k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{C,\ \deg C=k} q^{l(C)}$, тогда $\psi(-\chi-k) = \psi(k)q^{-k}q^{-\chi/2}$. Чтобы окончательно перейти к мультипликативной переменной t, положим $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(-\log_q t)$ и введем параметр $\delta = q^{\chi}$, тогда наша "суммарная по классам дивизоров одинаковой степени" версия теоремы Римана-Роха будет выглядеть, как $f(\frac{\delta}{t}) = t\delta^{-1/2}f(t)$. Если теперь к паре (f,f) применить теорему, которую мы только что доказали, то мы получим в точности тот, ответ, который должен быть (в общей формуле $\zeta(s) =$

$\epsilon q^{-\frac{\chi d}{2}} q^{\chi s}\zeta(d-s)$ нужно считать, что $d=1$ и $\epsilon=1$, поскольку X - кривая).

Нетрудно убедиться, что процесс регуляризации интеграла, примененный в теореме, параллелен процессу перехода от всюду расходящегося ряда $Z_0(X,T) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} T^k \sum\limits_{C,\ \deg C=k} q^{l(C)}$ к настоящей дзета-функции $Z(X,T)$. Чтобы подчеркнуть этот параллелизм, полезно провести доказательство теоремы (при $\delta<1$), разбивая $L(f,s)$ не на два, а на три интеграла, соответствующих промежуткам $(0,\delta),(\delta,1)$ и $(1,\infty)$.

5. Снова дзета-функция Римана.

Напомню, что выше мы представили определённую по аналогии с кривой над конечным полем дзета-функцию "собственной модели поля $\mathbf{Q}$" в виде $\xi(s)=\int_0^\infty \Phi(t)t^s\frac{dt}{t}$. Требование, чтобы она удовлетворяла функциональному уравнению такого же вида, как в одномерном конгруэнц - случае, диктует нам выбор функции $\Phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_\infty(nt)$. А именно, нам нужно, чтобы при некоторых a_0, c и δ для функции $f(t)=\Phi(t)+a_0$ выполнялось соотношение $f(\frac{\delta}{t})=ctf(t)$.

Анализ подсчетов, проделанных нами для случая кривой, показывает, что для непосредственного использования теоремы Римана-Роха суммировать надо не количества элементов в проективных пространствах эффективных дивизоров в классе C, а количества элементов в векторных пространствах $L(D)$. Легко видеть, что в нашем случае это означает переход от $\Phi(t)$ к $f(t)=2\Phi(t)+1$, поскольку каждому главному дивизору соответствуют ровно два рациональных числа, а ноль содержится в $L(D)$ при любом D. Тем самым, мы формально можем считать, что $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} F_\infty(nt)$, где $F_\infty(-x)=F_\infty(x)$, а $F_\infty(0)=1$, но надо помнить, что переменная x имеет иное происхождение, нежели переменная t: первая связана с функциями на нашей "кривой", то есть с рациональными числами, в то время как вторая - с содержаниями дивизоров.

Определим на функциях на оси x (временно опуская точный список условий, которым они должны удовлетворять) преобразование Фурье по формуле $\hat{f}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}dx$. Обозначим T оператор умножения переменной x (или y) на t. Элементарно проверяется, что какова бы ни была функция f, $t\widehat{f\cdot T}=\hat{f}\cdot T^{-1}$. Если убрать крышки, то именно этого мы хотим от нашей функции.

Содержательным утверждением, заменяющим теорему Римана-Роха, будет формула Пуассона: для разумных функций (мы вновь опускаем подробные условия) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} g(n) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n)$. (несложное доказательство получается разложением функции $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} g(n+x)$ в ряд Фурье, и я его также опускаю). Применяя её к функции, получаем $tf\cdot T = t\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(F_\infty\cdot T)(n) = t\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(\widehat{F_\infty\cdot T})(n) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(\widehat{F_\infty}\cdot T^{-1})(n)$. Тем самым, достаточным условием для того, чтобы функциональное уравнение выполнялось, является автодвойственность функции F_∞ относительно преобразования Фурье. Напомним, что по происхождению F_∞ - монотонно убывающая от единицы до нуля функция на полуоси $x > 0$, которую мы продолжили на левую полуось по симметрии.

Лемма. Функция $e^{-\pi x^2}$ автодвойственна.

Доказательство. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x y} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+iy)^2} e^{-\pi y^2} dx = e^{-\pi y^2} \int\limits_{z=iy-\infty}^{z=iy+\infty} e^{-\pi z^2} dz = e^{-\pi y^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi z^2} dz$ (поскольку функция $e^{-\pi z^2}$ стремится к нулю при стремлении $|z|$ к бесконечности и не имеет полюсов). Интеграл вероятности $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi z^2} dz = 1$, так что лемма доказана ■

Итак, мы получили формулу $f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 n^2}$. Без труда проверяется, что эта функция удовлетворяет условиям роста теоремы о преобразовании Меллина, при этом $f(\infty) = a_0 = 1$, $f = g$, $b_0 = 1, c = d = \delta = 1$. $L(f,s) = \int_0^\infty (f(t) - a_0) t^s \frac{dt}{t}$; этот ряд продолжается мероморфно на всю комплексную плоскость с полюсами в $s = 0$ (вычет -1) и в $s = 1$ (вычет 1).

С другой стороны, $L(f,s) = 2\int_0^\infty \Phi(t) t^s \frac{dt}{t} = 2\xi(s) = 2\zeta(s)\int_0^\infty E_\infty(t) t^s \frac{dt}{t} = 2\zeta(s)\int_0^\infty e^{-\pi t^2} t^s \frac{dt}{t} = 2\zeta(s)\int_0^\infty e^{-y} \frac{y^{s/2}}{\pi^{s/2}} \frac{dy}{2y} = \zeta(s)\frac{\Gamma(s/2)}{\pi^{s/2}}$. Здесь $\Gamma(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$ - преобразование Меллина экспоненты e^{-t}. Классические (несложные) вычисления, которые оставляются для самостоятельного изучения, показывают, что $\Gamma(s)$ мероморфна на $\mathbf{C}$, не имеет нулей и имеет простые полюса в точках $s = 0, -1, -2, \ldots$, причем вычет в точке $(-k)$ равен $\frac{(-1)^k}{k!}$. Таким образом, $\zeta(s)$ обязана обращаться в нуль в $s = -2, -4, \ldots$. В $s = 0$ нуля нет (как $\Gamma(s/2)$, так и $\xi(s)$ имеют простой полюс), и, как видно из предыдущего, $\zeta(0) = -1/2$.

6. Дзета - функция Дедекинда.

Вместо поля $\mathbf{Q}$ и кольца $\mathbf{Z}$ рассмотрим теперь конечное расширение $K/\mathbf{Q}$ степени N и его кольцо целых $\mathcal{O}_K$. Пусть поле K имеет r_1 вещественных и $2r_2$ комплексных вложений в $\mathbf{C}$ (буквы s и t, использовавшиеся ранее, в рассказе о дзета-функциях принято использовать для других целей), так что $K \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} = \mathbf{V}_\infty = \mathbf{R}^{r_1} \oplus \mathbf{C}^{r_2}$ и $r_1 + 2r_2 = N$. Из каждой пары комплексно-сопряженных вложений выберем по одному, тем самым фиксировав вложение $\sigma : K \to \mathbf{R}^{r_1} \oplus \mathbf{C}^{r_2}$ вместе с набором $\{\sigma_j : K \to \mathbf{R}, 1 \le j \le r_1; \sigma_j : K \to \mathbf{C}, r_1 + 1 \le j \le r_1 + r_2\}$. Будем считать, что $||\sigma_j(a)|| \stackrel{\text{def}}{=} |\sigma_j(a)|$ при $j \le r_1$ и $||\sigma_j(a)|| \stackrel{\text{def}}{=} |\sigma_j(a)|^2$ при $j > r_1$.

Функция $\zeta_K(s) = \sum\limits_{I \subset \mathcal{O}_K} (N(I))^{-s}$, где суммирование ведется по всем ненулевым целым идеалам кольца $\mathcal{O}_K$, включая тривиальный, а $N(I)$ - норма идеала (т.е. его индекс как подгруппы в $\mathcal{O}_K$), называется дзета-функцией Дедекинда поля K. Она является дзета-функцией схемы $\operatorname{spec} \mathcal{O}_K$ в смысле определения из начала этой главы.

Как и раньше, для того, чтобы получить “настоящую дзета-функцию собственной модели поля K”, перейдем от идеалов к дивизорам Аракелова. Группа дивизоров Аракелова поля K имеет вид $\overline{\operatorname{Div}}_K \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{\mathfrak{p}} \mathbf{Z} + \sum\limits_{j=1}^{r_1+r_2} \mathbf{R}$, где $\mathfrak{p}$ пробегает ненулевые простые идеалы кольца $\mathcal{O}_K$. Таким образом, дивизор Аракелова является суммой своих финитной и инфинитной частей; последняя лежит в пространстве $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ (его часто называют “логарифмическим пространством”), координаты в котором нумеруются архимедовыми нормированиями поля K. Степень дивизора Аракелова D с компонентами $\{d_\mathfrak{p}, d_j\}$ равна $\deg(D) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{\mathfrak{p}} d_\mathfrak{p} \log N(\mathfrak{p}) + \sum\limits_{j=1}^{r_1+r_2} d_j$, его абсолютная норма $N(D) = \exp(\deg D)$, а содержание $||D|| = (N(D))^{-1}$. Каждому числу $a \in K^*$ соответствует главный дивизор (a) с компонентами $\{\mathrm{v}_\mathfrak{p}(a), -\log ||\sigma_j(a)||\}$, его степень равна нулю, а абсолютная норма и содержание - единице. Мы будем обозначать $\mathfrak{l} : K^* \to \mathbf{R}^{r_1+r_2}$ отображение, которое числу a ставит в соответствие инфинитную часть его дивизора Аракелова.

Подобно тому, как это делалось выше, рассмотрим функцию $\xi_K(s) = \sum\limits_{D \ge 0} (N(D))^{-s}$, понимая под ней интеграл $\int\limits_{D \in \overline{\operatorname{Div}}_K} E(D) ||D||^s d\mu$, где мера, как и прежде, отвечает суммированию на $\mathbf{Z}$ - координатах и обычному интегрированию по $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ на оставшихся,

а уровень эффективности $E(D)$ равен нулю, если хоть одна степень $d_{\mathfrak{p}}$ отрицательна, а в оставшихся случаях равен $\prod\limits_{j=1}^{r_1} E_\infty(d_j) \prod\limits_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} (E_\infty(d_j/2))^2$. Здесь $E_\infty(z_j) = e^{-\pi \exp(-z_j)^2}$ - это та же функция, которая использовалась для дзета-функции Римана, но для компонент дивизора Аракелова, отвечающих парам комплексных вложений K в $\mathbf{C}$, мы поделили её аргумент пополам, а саму функцию возвели в квадрат с тем, чтобы "инфинитный" фактор уровня эффективности главного дивизора, отвечающего рациональному числу $a \in \mathbf{Q}$ был произведением N одинаковых сомножителей, независимо от того, как именно бесконечное нормирование распадается в поле K (можно считать, что для конечных нормирований это так). Из определения очевидно, что
$\xi_K(s) = \zeta_K(s) \int\limits_{z \in \mathbf{R}^{r_1+r_2}} E_\infty(z) \exp(-z)^s dz$, где уровень эффективности $E_\infty(z)$ задается предыдущей формулой (с заменой d_j на z_j), а $\exp(z) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\sum\limits_{j=1}^{r_1+r_2} z_j)$.
Элементарное вычисление дает $\xi_K(s) = 2^{-r_1} \zeta_K(s) (\frac{\Gamma(s/2)}{\pi^{s/2}})^{r_1} (\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s})^{r_2}$. Осталось убедиться в том, что функция ξ_K мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость и удовлетворяет функциональному уравнению, а также установить точный вид последнего.

После исключения из списка дивизоров Аракелова с нулевым уровнем эффективности (т.е имеющих хотя бы одну отрицательную финитную компоненту) и объединения оставшихся с одним и тем же содержанием t формула приобретает вид
$\xi_K(s) = \int\limits_0^\infty \Phi(t) t^s \frac{dt}{t}$, где $\Phi(t) = \sum\limits_{I \subset \mathcal{O}_K} \int\limits_{\substack{z \in \mathbf{R}^{r_1+r_2} \\ \sum z_j = -\log t - \log N(I)}} \prod\limits_{j=1}^{r_1} e^{-\pi \exp(-z_j)^2} \prod\limits_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} e^{-2\pi \exp(-z_j)} d\mu(z)$,

где μ-мера Лебега на гиперплоскости, по которой производится интегрирование.

Сосчитаем функцию $\Phi(t)$ для частного случая, когда все идеалы в кольце $\mathcal{O}_K$ главные. Множество образующих ненулевого главного идеала представляет собой орбиту группы единиц $\mathcal{O}_K^*$ для её свободного действия на множестве ненулевых элементов $a \in \mathcal{O}_K$. Группа $\mathcal{O}_K^*/W$ свободно действует на логарифмическом пространстве $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ (единица u переводит точку с координатами z_j в точку с координатами $z_j - \log ||\sigma_j(u)||$; корни из единицы, составляющие подгруппу $W \subset \mathcal{O}_K^*$, порядок которой мы обозначим w, действуют тождественно). Все гиперплоскости $\sum z_j = c$ при этом действии переходят в себя, ибо $\sum \log ||\sigma_j(u)|| = \log |N_{K/\mathbf{Q}}(u)| = 0$. Поэтому можно сумму по идеалам поменять на сумму по ненулевым элементам $a \in \mathcal{O}_K$, одновременно поменяв интеграл по гиперплоскости на интеграл по фундаментальной области действия на ней $\mathcal{O}_K^*/W$, в углу которой находится точка с координатами $z_j = -\log ||\sigma_j(a)|| -$

($\log t/N$ или $2\log t/N$, в зависимости от того, вещественным или комплексным является вложение σ_j) - эту область мы обозначим $E_{a.t}$. В результате получаем

$$\Phi(t) = \frac{1}{w}\sum_{0\neq a\in\mathcal{O}_K}\int_{z\in E_{a,t}}\prod_{j=1}^{r_1} e^{-\pi\exp(-z_j)^2}\prod_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} e^{-2\pi\exp(-z_j)}d\mu(z).$$

Выберем набор из r_1+r_2-1 единиц u_k, порождающий группу $\mathcal{O}_K^*/W$. Тогда координаты точек внутри фундаментальной области $E_{a.t}$ будут иметь вид $z_j = -\log||\sigma_j(a)|| - \sum\limits_{k=1}^{r_1+r_2-1} x_k \log||\sigma_j(u_k)|| - (\log t/N$ или $2\log t/N)$, при этом все x_k изменяются в пределах от 0 до 1. Формула приобретает вид:

$$\Phi(t) = \frac{1}{w}\sum_{0\neq a\in\mathcal{O}_K}\int_{z\in E} e^{-\pi t^{2/N}(\sum\limits_{j=1}^{r_1}|\sigma_j(a)|^2|\sigma_j(z)|^2+\sum\limits_{j=r_1+1}^{r_1+r_2}2|\sigma_j(a)|^2|\sigma_j(z)|^2)}d\mu(z).$$

Здесь E - фундаментальная область на гиперплоскости в $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ с нулевой суммой координат, отвечающая базису $\mathfrak{l}(u_k)$, и мы используем формальное обозначение $|\sigma_j(z)|$ для величины $\prod\limits_{k=1}^{r_1+r_2-1}|\sigma_j(u_k)|^{x_k}$, если точка $z\in E$ имеет координаты x_k в указанном базисе.

Поменяв местами интегрирование по E с суммированием по $a\in\mathcal{O}_K\setminus 0$ и добавив к каждой сумме единицу, отвечаюшую $a=0$, чтобы получить настоящую тэта-функцию, окончательно получим: $\Phi(t) = \frac{1}{w}\int\limits_{z\in E}(\Theta_{\mathcal{O}_K}(C_{t,z})-1)d\mu(z)$.

Здесь $C_{t,z}$ - вектор длины r_1+r_2 с координатами $c_j = t^{2/N}|\sigma_j(z)|^2$, а Θ - многомерная тэта - функция решетки $\mathcal{O}_K$ ранга N в пространстве $\mathbf{R}^N = \mathbf{R}^{r_1}\oplus\mathbf{C}^{r_2}$, отвечаюшая положительно определенному скалярному произведению $< l,m > \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j=1}^{r_1} l_j m_j + \sum\limits_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} 2\Re(l_j\overline{m_j})$. Иными словами, $\Theta_{\mathcal{O}_K}(C) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{a\in\mathcal{O}_K} e^{-\pi<C\sigma(a),\sigma(a)>}$, если условиться, что умножение на C растягивает все координаты $\sigma_j(a)$, как вещественные, так и комплексные, в c_j раз.

Для того, чтобы установить функциональное уравнение для функции $\Phi(t)$, а вместе с ней и для её преобразования Меллина $\xi_K(s)$, воспользуемся, как и в одномерном случае, формулой Пуассона. Её исходная версия выглядит так: если A - симметричная вещественная $N\times N$ - матрица, такая что (Ax,x) - положительно определенная квадратичная форма на $\mathbf{R}^N$, то $\sum\limits_{l\in\mathbf{Z}^N} e^{-\pi(Al.l)} = \frac{1}{\sqrt{|\det A|}}\sum\limits_{l\in\mathbf{Z}^N} e^{-\pi(A^{-1}l.l)}$. где $(\,,\,)$ - обычное скалярное произведение. Доказательство естественно обобщается с одномерного случая и будет опущено.

Рассмотрим $\mathbf{R}$ - базис $\{1,\ldots,1,1,i,\ldots,1,i\}$ в $\mathbf{R}^N$, он порождает решётку $\mathbf{Z}^N \in \mathbf{R}^N$. Матрица формы $(\ ,\ )$ в этом базисе единична, матрица A формы $<\ ,\ >$ диагональна с единицами на первых r_1 местах и двойками на оставшихся $2r_2$ местах, а матрица умножения на C диагональна с диагональю $\{c_1,c_2,\ldots,c_{r_1},c_{r_1+1},c_{r_1+1},\ldots,c_{r_1+r_2},c_{r_1+r_2}\}$. Пусть $L=\sigma(\mathcal{O}_K)\in\mathbf{R}^N$ и $L'\in\mathbf{R}^N$ - двойственная к L решётка относительно формы $<\ ,\ >$. Обозначим B и B' их порождающие матрицы в указанном базисе. Тогда $\Theta_{\mathcal{O}_K}(C) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{a\in\mathcal{O}_K} e^{-\pi<C\sigma(a),\sigma(a)>} = \sum\limits_{l\in L} e^{-\pi(ACl.l)} = \sum\limits_{l\in\mathbf{Z}^N} e^{-\pi(ACBl.Bl)} = \sum\limits_{l\in\mathbf{Z}^N} e^{-\pi(B^tACBl.l)} =$
$\frac{1}{\sqrt{|\det B^tACB|}}\sum\limits_{l\in\mathbf{Z}^N} e^{-\pi(B^tACB)^{-1}l.l)} = \frac{1}{\sqrt{|\det B^tACB|}}\sum\limits_{l\in L'} e^{-\pi(B^tACB)^{-1}(B')^{-1}l.(B')^{-1}l)} =$
$\frac{1}{\sqrt{|\det B^tACB|}}\sum\limits_{l\in L'} e^{-\pi(B'^t)^{-1}B^{-1}C^{-1}A^{-1}(B^t)^{-1}(B')^{-1}l.l)} = \frac{1}{\sqrt{|\det B^tACB|}}\sum\limits_{l\in L'} e^{-\pi(AC^{-1}l.l)}$.
Последнее равенство следует из того, что $ABB'^t = AB'B^t = \mathrm{Id}$ по определению решетки L'.

В теории расширений в качестве стандартной билинейной формы на $K\times K$ используется форма следа $\mathrm{Tr}\,ab : K\times K\to\mathbf{Q}$. Если эту форму продолжить по $\mathbf{R}$ -линейности на $K\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}=\mathbf{R}^N$, то она перейдёт в неопределенную форму $\sum\limits_{j=1}^{r_1} l_jm_j + \sum\limits_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} 2\Re(l_jm_j)$. Обозначим $L^\vee$ решётку, двойственную к L относительно этой формы, тогда $L^\vee$, очевидно, получится из L', если подвергнуть все координаты векторов последней комплексному сопряжению. Поскольку A и C - вещественные диагональные матрицы, эта процедура не изменит скалярные произведения $(AC^{-1}l,l)$, так что суммирование в последней формуле можно вести по решётке $L^\vee$ вместо решётки L'. Используя это, получаем: $\Theta_{\mathcal{O}_K}(C) = \sum\limits_{a\in\mathcal{O}_K} e^{-\pi<C\sigma(a),\sigma(a)>} = \frac{1}{\sqrt{|\det B^tACB|}}\sum\limits_{l\in L^\vee} e^{-\pi(AC^{-1}l.l)} =$
$\frac{1}{\sqrt{|\det B^tACB|}}\sum\limits_{a\in\mathcal{O}_K^\vee} e^{-\pi<C^{-1}\sigma(a),\sigma(a)>}$.

Простое упражнение показывает, что $\det(B)^2\det A = |\Delta_K|$. Здесь Δ_K - дискриминант поля K. он равен определителю Грама любого базиса $\mathcal{O}_K$, а его абсолютная величина совпадает с групповым индексом $(\mathcal{O}_K : \mathcal{D}_K)$, где $\mathcal{D}_K$ - дифферента, образующую которой (согласно нашей договоренности все идеалы в $\mathcal{O}_K$ главные) мы обозначим d. Напомним, что $\mathcal{D}_K^{-1}$ - это как раз решетка в K, двойственная к $\mathcal{O}_K$ относительно формы следа. Таким образом, получаем: $\Theta_{\mathcal{O}_K}(C) = \frac{1}{\sqrt{|\Delta_K\det C|}}\sum\limits_{a\in\mathcal{D}_K^{-1}} e^{-\pi<C^{-1}\sigma(a),\sigma(a)>} =$

$\frac{1}{\sqrt{|\Delta_K\det C|}}\sum\limits_{a\in\mathcal{O}_K} e^{-\pi<C^{-1}\sigma(d^{-1}a),\sigma(d^{-1}a)>} = \frac{1}{\sqrt{|\Delta_K\det C|}}\Theta_{\mathcal{O}_K}(C')$,
где координаты вектора C' имеют вид $c'_j = c_j^{-1}|\sigma_j(d)|^{-2}$.

В частности, если $C = C_{t,z}$, то $c'_j = c_j^{-1}|\sigma_j(d)|^{-2} = t^{-2/N}|\sigma_j(z)|^{-2}|\sigma_j(d)|^{-2}$. Детерминант матрицы умножения на C в пространстве $\mathbf{R}^N = \mathbf{R}^{r_1} \oplus \mathbf{C}^{r_2}$, которая диагональна, равен $\prod\limits_{j=1}^{r_1} c_j \prod\limits_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} c_j^2$, таким образом $\det C_{t,z} = t^2$, поскольку $\prod\limits_{j=1}^{r_1} |\sigma_j(z)| \prod\limits_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} |\sigma_j(z)|^2 = 1$ (точка z в логарифмическом пространстве лежит на гиперплоскости с нулевой суммой координат). Чтобы прояснить связь между векторами $C_{t,z}$ и $C'_{t,z}$, поделим и умножим каждую координату c'_j на $|N_{K/\mathbf{Q}}d|^{2/N} = |\Delta_K|^{2/N}$ (норма дифференты есть дискриминант), так что
$c'_j = (\frac{1}{|\Delta_K|t})^{2/N}|\sigma_j(z)|^{-2}|\sigma_j(d)|^{-2}|\Delta_K|^{2/N} = (\frac{1}{|\Delta_K|t})^{2/N}|\sigma_j(-z + \mathfrak{l}(d) - \frac{\mathfrak{l}(|\Delta_K|}{N})|^2$.
(напомним, что отображение $\mathfrak{l}$ ставит в соответствие ненулевому элементу поля K инфинитную часть его дивизора Аракелова). Следовательно, для тэта-функции имеем $\Theta_{\mathcal{O}_K}(C_{t.z}) = \frac{1}{t\sqrt{|\Delta_K|}}\Theta_{\mathcal{O}_K}(C_{\frac{1}{|\Delta_K|t}, -z+\mathfrak{l}(d)-\frac{\mathfrak{l}(|\Delta_K|}{N}})$

Сумма координат вектора $\mathfrak{l}(d)$ в $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ равна $-\log|N_{K/\mathbf{Q}}d| = -\log|\Delta_K|$, и она совпадает с суммой координат вектора $\frac{\mathfrak{l}(|\Delta_K|}{N})$, поскольку $N_{K/\mathbf{Q}}\Delta_K = \Delta_K^N$. Значит, второй аргумент в правой части отличается от $(-z)$ сдвигом на постоянный вектор $z_0 = \mathfrak{l}(d) - \frac{\mathfrak{l}(|\Delta_K|}{N}$, лежащий, как и сам z, в гиперплоскости $\mathbf{R}_0^{r_1+r_2} \subset \mathbf{R}^{r_1+r_2}$ с нулевой суммой координат.

Для любой единицы $u \in \mathcal{O}_K^*$, числа $0 \neq a \in \mathcal{O}_K$, вектора $z \in \mathbf{R}^{r_1+r_2}$ и параметра $\tau > 0$ справедливо равенство $e^{-\pi<C_{\tau,z-\mathfrak{l}(u)}au,au>} = e^{-\pi<C_{\tau,z}a,a>}$. Поэтому $\int\limits_{z\in E}(\Theta_{\mathcal{O}_K}(C_{\tau,z}) - 1)d\mu(z) = w\sum\limits_{a_I}\int\limits_{z\in\mathbf{R}_0^{r_1+r_2}} e^{-\pi<C_{\tau,z}a_I,a_I>}$, где $\{a_I\}$ - произвольный набор представителей орбит действия $\mathcal{O}_K^*$ на $\mathcal{O}_K \setminus 0$, то есть образующих целых идеалов (которые все главные). Последнее выражение не зависит от того, с какой фундаментальной области действия $\mathcal{O}_K/W$ на гиперплоскости $\mathbf{R}_0^{r_1+r_2}$ мы начинали, а значит
$\int\limits_{z\in E}(\Theta_{\mathcal{O}_K}(C_{\frac{1}{|\Delta_K|t}, -z+\mathfrak{l}(d)-\frac{\mathfrak{l}(|\Delta_K|}{N}}) - 1)d\mu(z) = \int\limits_{z\in -E+z_0}(\Theta_{\mathcal{O}_K}(C_{\frac{1}{|\Delta_K|t}, z}) - 1)d\mu(z)$
$= \int\limits_{z\in E}(\Theta_{\mathcal{O}_K}(C_{\frac{1}{|\Delta_K|t}, z}) - 1)d\mu(z)$.

В итоге для функции $\Phi_0(t) = \frac{1}{w}\int\limits_{z\in E}\Theta_{\mathcal{O}_K}(C_{t,z})d\mu(z)$ получаем функциональное уравнение $\Phi_0(t) = \frac{1}{t\sqrt{|\Delta_K|}}\Phi_0(\frac{1}{|\Delta_K|t})$. Напомним, что $\Phi(t) = \Phi_0(t) - \frac{R}{w}$ (где $R = \int\limits_{z\in E} d\mu(z) = \mathrm{vol}\,(E)$

- регулятор поля K), а $\xi_K(s) = \int\limits_0^\infty \Phi(t)t^s\frac{dt}{t}$.

Теперь мы можем применить теорему о преобразовании Меллина, положив в ней $f = g = \Phi_0(t), a_0 = b_0 = \frac{R}{w}, d = 1, c = \sqrt{|\Delta_K|}$ и $\delta = |\Delta_K|^{-1}$. Функциональное уравнение для функции ξ_K будет иметь вид $\xi_K(s) = \sqrt{|\Delta_K|}|\Delta_K|^{-s}\xi_K(1-s)$, а сама функция будет мероморфной на $\mathbf{C}$ с двумя полюсами и вычетами в них, соответственно, $\operatorname{res}_{s=0}\xi(s) = -\frac{R}{w}$ и $\operatorname{res}_{s=1}\xi(s) = \frac{R}{w\sqrt{|\Delta_K|}}$. Сравнивая полученное функциональное уравнение с его аналогом для конгруэнц-дзета-функции кривой над $\mathbf{F}_q$ ($\zeta(s) = q^{-\frac{\chi}{2}}q^{\chi s}\zeta(1-s)$), мы видим, что роль модуля дискриминанта в геометрическом случае играет величина $q^{-\chi} = q^{2g-2}$. Если умножить функцию $\xi(s)$ на $|\Delta_K|^{s/2}$, то получившаяся функция будет симметрична относительно замены $s \leftrightarrow 1-s$. Наконец, дзета-функция Дедекинда $\zeta_K(s) = 2^{r_1}(\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)})^{r_1}(\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)})^{r_2}\xi_K(s)$ имеет единственный полюс в точке $s = 1$, поскольку полюс функции ξ_K в точке $s = 0$ убивается нулем порядка $r_1 + r_2$, который в этой точке имеет произведение функций Γ^{-1}. Вычет $\operatorname{res}_{s=1}\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}R}{w\sqrt{\Delta_K}}$, поскольку $\Gamma(1) = 1$, а $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Пусть теперь не все идеалы в $\mathcal{O}_K$ главные. Тогда можно применить следующий прием. Функция $\zeta_K(s)$, а вместе с ней и функция $\xi_K(s)$ разбиваются в сумму $h = \#(Cl(\mathcal{O}_K)$ компонент, отвечающих суммированию по целым идеалам из данного класса (соответственно, по дивизорам Аракелова с финитной частью, принадлежащей данному классу). Положим $\xi_K(s) = \sum\limits_{\mathcal{A}\in Cl(\mathcal{O}_K)}\xi_{\mathcal{A}}(s)$. Выберем дробный $\mathcal{O}$ - идеал $\mathfrak{b}$, принадлежащий обратному классу $\mathcal{A}^{-1}$, тогда умножение на $\mathfrak{b}$ устанавливает взаимнооднозначное соответсвие между целыми идеалами из $\mathcal{A}$ и главными дробными идеалами, делящимися на $\mathfrak{b}$ (то есть такими главными дробными идеалами J, что $J\mathfrak{b}^{-1}$ - целый идеал), которые, в свою очередь, взаимнооднозначно соответствуют орбитам действия $\mathcal{O}_K^*$ на множестве $\mathfrak{b}\setminus 0$. Если $I \in \mathcal{A}$ - целый идеал, а $b \in \mathfrak{b}$ - какой-нибудь представитель соответствующей ему орбиты, то $N(I) = |N_{K/\mathbf{Q}}(b)|/N(\mathfrak{b})$ (будем, как мы и делали раньше для целых идеалов, считать нормой дробного идеала I положительную образующую идеала $N_{K/\mathbf{Q}}I$).

Повторяя дословно предыдущие рассуждения, получаем, что $\xi_{\mathcal{A}}(s) = \int\limits_0^\infty \Phi_{\mathfrak{b}}(t)t^s\frac{dt}{t}$, при этом $\Phi_{\mathfrak{b}}(t) = \frac{1}{w}\int\limits_{z\in E}(\Theta_{\mathfrak{b}}(C_{t,z,\mathfrak{b}})-1)d\mu(z)$, а $C_{t,z,\mathfrak{b}}$ - вектор длины r_1+r_2 с координатами $c_j = (\frac{t}{N(\mathfrak{b})})^{2/N}|\sigma_j(z)|^2$. Применяя, как и выше, Формулу Пуассона, получим функциональное уравнение вида $\Theta_{\mathfrak{b}}(C_{t,z,\mathfrak{b}}) = \frac{1}{\sqrt{|\delta(\mathfrak{b})\det C_{t,z,\mathfrak{b}}|}}\Theta_{\mathcal{D}_K^{-1}\mathfrak{b}^{-1}}(C_{t,z,\mathfrak{b}}^{-1})$, Подставляя в эту формулу значения $|\delta(\mathfrak{b})| = \Delta_K N(\mathfrak{b})^2$, $\det C_{t,z,\mathfrak{b}} = \frac{t^2}{N(\mathfrak{b})^2}$ и $C^{-1}_{t,z,\mathfrak{b}} = C_{\frac{1}{\Delta_K t},-z,\mathcal{D}_K^{-1}\mathfrak{b}^{-1}}$, получаем $\Theta_{\mathfrak{b}}(C_{t,z,\mathfrak{b}}) = \frac{1}{t\sqrt{|\Delta_K|}}\Theta_{\mathcal{D}_K^{-1}\mathfrak{b}^{-1}}(C_{\frac{1}{\Delta_K t},-z,\mathcal{D}_K^{-1}\mathfrak{b}^{-1}})$, и значит, $(\Phi_{\mathfrak{b}})_0(t) = \frac{1}{t\sqrt{|\Delta_K|}}(\Phi_{\mathcal{D}_K^{-1}\mathfrak{b}^{-1}})_0(\frac{1}{|\Delta_K|t})$. Вычисления даже несколько упростились, поскольку мы не стали предпринимать попытку привести обе части уравнения к одной и той же решетке (эта попытка в общем случае обречена на неудачу, так как дробные идеалы $\mathfrak{b}$ и $\mathcal{D}_K^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$ не обязаны быть подобными).

Вновь обращаясь к преобразованию Меллина, получаем функциональное уравнение $\xi_{\mathcal{A}}(s) = \sqrt{|\Delta_K|}|\Delta_K|^{-s}\xi_{cl(\mathcal{D}_K)^{-1}\mathcal{A}^{-1}}(1-s)$ и аналитическое продолжение функции $\xi_{\mathcal{A}}(s)$ на всю комплексную плоскость с полюсами в $s=0$ и в $s=1$ и с такими же вычетами, как и раньше. Суммируя по всем классам идеалов, получаем то же самое для $\xi_K(s)$, при этом вычеты в полюсах придется умножить на число классов идеалов h (предыдущий подсчет мы проводили в предположении, что $h=1$).

7. Метод Тэйта - Ивасавы.

Вычисляя функцию $\xi_K(s)$ как интеграл по множеству дивизоров Аракелова, мы допустили существенную асимметрию между архимедовыми и неархимедовыми нормированиями, комбинируя суммирование по финитной части с интегрированием по логарифмическому пространству. Предложенный Тэйтом в его диссертации (1950) и независимо примерно тогда же Ивасавой подход более единообразен и позволяет распространить вычисление на более широкий класс дзета-функций, но принципиально от методов предыдущего раздела не отличается.

Рассмотрим вместо группы дивизоров Аракелова $\overline{\mathrm{Div}}_K$ группу иделей $\mathbf{J}_K$, тогда имеется сюръективное отображение $\mathbf{J}_K \stackrel{\mathrm{div}}{\to} \overline{\mathrm{Div}}_K$, ядро которого -подгруппа
$\mathbf{J}_{K,\ \mathrm{div}=0} = \prod\limits_{K_v=\mathbf{R}}(\pm 1)\prod\limits_{K_v=\mathbf{C}}(||z||_v = 1)\prod\limits_{\mathfrak{p}}\mathcal{O}^*_{\mathfrak{p}}$.
Выберем меру Хаара $dx = \prod\limits_v dx_v$ на аддитивной группе кольца аделей $\mathbf{A}_K^+$, где v пробегает все нормирования, как архимедовы, так и неархимедовы, считая, например, что dx_v есть мера Лебега для архимедовых v, и что $\int\limits_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} dx_v = 1$ для неархимедового v. соответствующего простому идеалу $\mathfrak{p}\subset\mathcal{O}_K$.
Поскольку интегрирование по дивизорам Аракелова мы собираемся заменить на интегрирование по иделям (а не по аделям), то необходимо также выбрать меру Хаара на $\mathbf{J}_K$. Положим $||x_v|| = |x_v|^{[K_v:\mathbf{R}]}$ для архимедовых v и $||x_v|| = \#(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p})^{\mathrm{v}_{\mathfrak{p}}(x_v)}$ для неархимедовых. Тогда нетрудно проверить, что мера $d^*a = \prod\limits_v d^*a_v$. где $d^*a_v =$

$\frac{da_v}{||a_v||}$ для вещественных v, $d^*a_v = \frac{2da_v}{||a_v||}$ для комплексных v и $d^*a_v = \frac{N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}-1}\frac{da_v}{||a_v||}$ для $v = \mathfrak{p}$, будет мерой Хаара на группе $\mathbf{J}_K$, причем $\int\limits_{\mathcal{O}_\mathfrak{p}^*} d^*a = 1$ при всех $\mathfrak{p}$. Выбор меры для комплексных v призван обеспечить, чтобы при отображении $\mathrm{div}_v : \mathbf{C}^* = \mathbf{C}_1^* \times \mathbf{R}_{>0}^* \to \mathbf{R}$, которое задается формулой $\mathrm{div}_v(a_v) = -2\log|a_v|$, мера d^*a_v была произведением обычной меры на окружности $\mathbf{C}_1^*$ и меры Лебега, поднятой с $\mathbf{R}$.

Продолжим функцию "уровень эффективности" с дивизоров Аракелова на идели, полагая $F(a) = \prod\limits_v F_v(a_v)$, где $F_v(a_v) = E_v(\mathrm{div}a_v)$ для неархимедовых v (иначе говоря, $F_v(a_v) = 1$, если $a_v \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$ и 0 иначе), $F_v(a_v) = \frac{1}{2}E_v(\mathrm{div}a_v) = \frac{1}{2}e^{-\pi||a_v||^2}$ для вещественных v и $F_v(a_v) = \frac{1}{2\pi}E_v(\mathrm{div}a_v) = \frac{1}{2\pi}e^{-2\pi||a_v||}$ для комплексных v. Поделить на 2 либо 2π пришлось, поскольку при нашем выборе меры на иделях она есть произведение обычной меры на дивизорах Аракелова и меры на слое отображения div, который представляет собой две точки в вещественном случае и единичную окружность в комплексном (а все $\mathfrak{p}$ - адические слои $\mathcal{O}_\mathfrak{p}^*$ имеют меру 1).

Теперь функцию ξ_K можно вычислить как интеграл по иделям: $\xi_K(s) = \int\limits_{\mathbf{J}_K} F(a)||a||^s d^*a$. Объединяя, как раньше мы это делали с дивизорами Аракелова, идели с одинаковым содержанием, получаем $\xi_K(s) = \int\limits_{t=0}^{\infty} (\int\limits_{b\in\mathbf{J}_K^t} F(b)d^*b)t^s\frac{dt}{t}$, где $\mathbf{J}_K^t$ - множество иделей с содержанием t - это главное однородное пространство над подгруппой $\mathbf{J}_K^1$ единичных иделей.

Для того, чтобы можно было применить теорему о преобразовании Меллина, преобразуем внутренний интеграл точно так же, как мы это делали раньше. Подгруппа главных иделей K^* дискретна в $\mathbf{J}_K^1$ и факторгруппа компактна. Выберем фундаментальную область E, тогда $\int\limits_{b\in\mathbf{J}_K^t} F(b)d^*b = \int\limits_{b\in E}\sum\limits_{\alpha\in K^*} F(\alpha b\tau)d^*b \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{b\in E}(\Theta_K(b\tau)-1)d^*b$. Буквой τ мы обозначили идель с компонентами $\tau_v = t^{\frac{1}{N}}$ для архимедовых v и $\tau_v = 1$ для неархимедовых. Умножение на τ осуществляет сохраняющий меру изоморфизм между $\mathbf{J}_K^1$ и $\mathbf{J}_K^t$. Идель $b\tau$ - аналог вектора $C_{t,z}$ из предыдущего раздела.

Совершая элементарное, но принципиально важное последнее преобразование, мы использовали тот факт, что множество элементов K^* представляет собой дискретную кокомпактную подгруппу в $\mathbf{J}_K^1$, а после добавления нуля из него получается множество элементов K, и его уже можно рассматривать как дискретную кокомпактную подгруппу в $\mathbf{A}_K^+$. В предыдущем разделе аналогом этого перехода служил переход от суммирования по целым идеалам класса $\mathcal{A}$ к суммированию сначала по орбитам действия $\mathcal{O}_K^*$ на ненулевых элементах дробного идеала $\mathfrak{b} \in \mathcal{A}^{-1}$, а затем и по самим элементам $\mathfrak{b}$, включая нулевой, после чего $\mathfrak{b}$ рассматривался как решетка в пространстве $\mathbf{R}^{r_1} \oplus \mathbf{C}^{r_2}$.

Желая получить функциональное уравнения для тэта-функции, мы должны определить преобразование Фурье на группе $\mathbf{A}_K^+$. Зададим гомоморфизм
$\lambda : \mathbf{A}_K^+ \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ формулой $\lambda(x) = \sum\limits_v \lambda_v(x_v)$, где $\lambda_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{Tr}_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbf{Q}_p}(x_{\mathfrak{p}}) \mod \mathbf{Z}_p$ (точнее, его образ в $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$), и $\lambda(x_v) = -\mathrm{Tr}_{K_v/\mathbf{R}}(x_v) \mod \mathbf{Z}$ для архимедовых v. Знак "-" во второй части определения выбран для того, чтобы образ главного аделя всегда был равен нулю. Нетрудно проверить, что спаривание $< x, y > \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{2\pi i \lambda(xy)}$ со значениями в группе $\mathbf{C}_1^*$ комплексных чисел, по модулю равных 1, задает топологический изоморфизм группы $\mathbf{A}_K^+$ с её группой характеров, причем дискретная подгруппа $K^+ \subset \mathbf{A}_K^+$ является относительно этого спаривания своим собственным ортогональным дополнением.

Для того, чтобы формула Пуассона и следующий из неё аналог теоремы Римана-Роха приобрели особенно простой вид, удобно изменить меру Хаара на группе $\mathbf{A}_K^+$, сделав её автодвойственной. Напомним, что мера dx на группе $\mathbf{A}_K^+$, изоморфной своей группе характеров, называется автодвойственной, если преобразование Фурье $f(x) \mapsto \widehat{f}(y) = \int\limits_{\mathbf{A}_K^+} f(x) e^{-2\pi i \lambda(xy)} dx$ является унитарным оператором $L^2(\mathbf{A}_K^+) \to L^2(\mathbf{A}_K^+)$.
Для меры, с выбора которой мы начали этот раздел, локально скалярный квадрат характеристической функции кольца $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ равен $\int\limits_{\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}} dx_v = 1$, а её локальное преобразование Фурье, как нетрудно проверить, является характеристической функцией двойственного к $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ относительно формы следа дробного идеала $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^{-1}$, и скалярный квадрат этой функции равен $\int\limits_{\mathcal{D}_{\mathfrak{p}}^{-1}} dx_v = |(\Delta_K)_{\mathfrak{p}})|$. Тем самым, чтобы локальная компонента меры при $v = \mathfrak{p}$ стала автодвойственной, dx_v нужно поделить на $\sqrt{|(\Delta_K)_{\mathfrak{p}}|}$. Соответственно, глобальную меру dx нужно будет поделить на $\sqrt{|\Delta_K|}$, а кроме этого умножить на 2^{r_2}, так как для поля $\mathbf{C}$ автодвойственной являеися удвоенная мера Лебега. Поскольку выбор меры Хаара (которая на любой локально-компактной группе определена с точностью до умножения на константу) на иделях и аделях осуществлялся независимо, меру на иделях мы менять не станем, а значит, и дзета-функция тоже не изменится.

Теперь можно написать формулу Пуассона: $\sum\limits_{\alpha \in K} \widehat{f}(\alpha) = \sum\limits_{\alpha \in K} f(\alpha)$ для непрерывной функции f на $\mathbf{A}_K^+$, удовлетворяющей разумным условиям сходимости, из которой (и очевидных свойств преобразования Фурье) следует, что для любого иделя a : $\frac{1}{||a||})\sum_{\alpha\in K}\widehat{f}(\frac{\alpha}{a}) = \sum_{\alpha\in K} f(\alpha a)$. Функцию F (“уровень эффективности”), можно доопределить на всех аделях $x \in \mathbf{A}_K^+$, считая при $v = \mathfrak{p}$, что $F_v(x_v) = 1$, если $x_v \in \mathcal{O}_\mathfrak{p}$, и $F_v(x_v) = 0$ в противном случае, а в архимедовых v полагая $F_v(0) = 1$, а для прочих x_v используя прежнюю формулу. Преобразование Фурье функции F можно вычислить, перемножив преобразования Фурье её сомножителей, отвечающих различным v, и мы получим функциональное уравнение для тэта-функции (причем решетка справа и слева одна и та же - K^+). Применив теперь теорему о преобразовании Меллина, мы еще раз получим аналитическое продолжение и функциональное уравнение для дзета-функции Дедекинда.

Важным преимуществом метода Тейта - Ивасавы является то, что он позволяет распространить основную теорему на более широкий класс дзета-функций. А именно, рассмотрим вместо $||a||^s$ произвольный непрерывный гомоморфизм $c : \mathbf{J}_K \to \mathbf{C}^*$, накладывая на него единственное условие - он должен, как и $||a||^s$, быть тривиальным на подгруппе главных иделей. Такой гомоморфизм называется квазихарактером. Нетрудно видеть, что любой квазихарактер представляется в виде $c(a) = \chi(a)||a||^s$, где $\chi : \mathbf{J}_K \to \mathbf{C}_1^*$ - характер (по историческим причинам характеры группы иделей, тривиальные на главных иделях, называются характерами Гекке или грёссенхарактерами). Если потребовать, чтобы характер χ был тривиален не только на главных иделях, но и на однопараметрической подгруппе $T \subset \mathbf{J}_K$, состоящей из определенных выше иделей τ, так что $\mathbf{J}_K = T \times \mathbf{J}_K^1$, то характер χ и комплексное число s определяются квазихарактером c однозначно.

Если определить $\xi(f,\chi,s) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbf{J}_K} f(a)\chi(a)||a||^s d^*a$, то, как и выше, получим, что $\xi_K(s)$ -преобразование Меллина функции $\int\limits_{b\in\mathbf{J}_K^t} f(b)\chi(b)d^*b = \int\limits_{b\in E}\sum\limits_{\alpha\in K^*} f(\alpha b\tau)\chi(\alpha b\tau)d^*b =$

$= \int\limits_{b\in E}(\Theta_{f,K}(b\tau)-1)\chi(b)d^*b$. Здесь $\Theta_{f,K}(b\tau) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\alpha\in K} f(\alpha b\tau)$, и вынося $\chi(b)$ за скобки, мы воспользовались тем принципиально важным обстоятельством, что $\chi(\alpha b\tau)$ зависит только от b. Если функция f удовлетворяет разумным условиям (список которых мы опускаем), гарантирующим сходимость тэта-функции и применимость к последней теоремы о преобразовании Меллина, то $\xi(f,\chi,s)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость с возможными полюсами только в $s = 0$ и в $s = 1$, и имеет место функциональное уравнение $\xi(f,\chi,s) = \xi(\widehat{f},\overline{\chi},1-s)$. Характер в правой части обратен характеру в левой, так как в аргументе тэта-функции при применении формулы Пуассона b меняется на b^{-1}.

На самом деле, для всех характеров χ, кроме тривиального, обе части суть целые функции. Действительно, из теоремы о преобразовании Меллина следует, что
$\operatorname{res}_{s=0} \xi(f, \chi, s) = -f(0) \int\limits_{b \in E} \chi(b) d^*b$, а $\operatorname{res}_{s=1} \xi(f, \chi, s) = \widehat{f}(0) \int\limits_{b \in E} \overline{\chi}(b) d^*b$,
где E - фундаментальная область для действия K^* на $\mathbf{J}^1_K$. По принятым нами условиям χ - характер группы $\mathbf{J}^1_K / K^*$, которая компактна, а следовательно, интеграл по ней равен её мере $\operatorname{vol}(E)$, если характер тривиален, и нулю в противном случае.