Эллиптические кривые. Задачи

1. Проверьте, что для эллиптической кривой над $\mathbf{C}$ определение спаривания Вейля через детерминант совпадает (с точностью до комплексного сопряжения) с определением из раздела про точки конечного порядка.
2. Сосчитайте дзета-функцию кривой $\tilde{E}$ для случая скрученной мультипликативной редукции.
3. Проверьте, что отображение $\rho_l : \mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k) \to \mathrm{Aut}\,(T_l(E))$ непрерывно.
4. Пусть кривая E задана уравнением $y^2 + y = x^3 - x$. Проверьте, что $E_{tors}(\mathbf{Q}) = 0$.
5. Пусть поле k совершенно, но алгебраически не замкнуто, кривая E определена над k и обладает комплексным умножением над k (т.е. $\mathrm{End}_k(E)$ строго больше, чем $\mathbf{Z}$). Пусть $l \neq \mathrm{char}(k)$ - простое число. Докажите, что образ $\mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k)$ в $\mathrm{Aut}\,(T_l(E)$ - коммутативная группа.
6. Докажите, что кривая над $\mathbf{F}_3$, заданная уравнением $y^2 + xy + y = x^3 - x^2 - x - 14$, является эллиптической и суперсингулярной.

7. Пусть L - решётка в $\mathbf{C}$. Определим σ-функцию Вейрштрасса формулой
$\sigma_L(z) = z \prod\limits_{w \in L,\, w \neq 0} \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2}(\frac{z}{w})^2}$.
Проверьте, что $\wp_L(z) = -(\log \sigma_L(z))''$ и что выполнено функциональное уравнение $\wp_L(x) - \wp_L(y) = -\frac{\sigma_L(x+y)\sigma_L(x-y)}{\sigma_L(x)^2\sigma_L(y)^2}$. “Это уравнение является ключевым для определения функции Нерона-Тэйта $\hat{h}$.