НМУ, I курс, 09.02.2022

Листок 1.

Задача 1. Пусть $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Докажите, что пространства $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ и $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ полны, гомеоморфны, но не изометричны.

Задача 2. Докажите, что в банаховом пространстве всякая последовательность вложенных замкнутых шаров имеет общую точку.

Задача 3*. Пусть линейное пространство X полно с нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, причем $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_2$. С помощью теоремы Бэра докажите, что найдется такое число C, что $\|\cdot\|_2 \le C\|\cdot\|_1$.

Задача 4*. Пусть $f_n, f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Будем говорить, что $f_n \to f$ в C^∞, если

$$\max_{x\in[-k,k]} \left| f_n^{(j)}(x) - f^{(j)}(x) \right| \to 0$$

при $n \to \infty$ для всех $j, k \ge 0$. Докажите, что такая сходимость задается метрикой, но не задается нормой.

Задача 5. Докажите, что полное бесконечномерное пространство нельзя представить в виде счетного объединения конечномерных пространств. Вывести из этого, что на пространстве многочленов нельзя ввести норму так, что оно станет полным.

Пусть X, Y — векторные пространства над $\mathbb{R}$. Отображение $L\colon X \mapsto Y$ называется линейным, если $L(\alpha x + \beta y) = \alpha Lx + \beta Ly$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $x, y \in X$. Линейное отображение называют линейным оператором. Если $Y = \mathbb{R}$, то L называют линейным функционалом.

Задача 6. Пусть $l, l_1, \dots, l_n$ — линейные функционалы и ядро l содержит $\bigcap_k \operatorname{Ker} l_k$. Докажите, что $l = c_1 l_1 + \ldots + c_n l_n$, где $c_i \in \mathbb{R}$.

Задача 7*. Докажите, что непрерывность линейного функционала на нормированном пространстве равносильна замкнутости его ядра. Верно ли аналогичное утверждение для линейных операторов?

Для линейного оператора A положим

$$\|A\| = \sup_{x\colon \|x\|\le 1} \|Ax\|.$$

Задача 8. (a) Докажите, что $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$ для непрерывных линейных линейных операторов $B\colon X \to Y$ и $A\colon Y \to Z$.

(b) Докажите, что пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ линейных непрерывных операторов со значениями в банаховом пространстве Y полно относительно операторной нормы.

Задача 9. Возьмем на $\mathbb{R}^n$ норму $\|x\| = \max|x_i|$. Найдите норму оператора, заданного матрицей A.

Задача 10. Пусть A — линейный непрерывный оператор в банаховом пространстве.

(a) Докажите, что ряд $e^A = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!} A^n$ сходится по операторной норме.

(b) Пусть $AB = BA$. Докажите, что $e^{A+B} = e^A e^B$.