НМУ, I курс, 23.02.2022

Листок 2.

Задача 1. Докажите, что следующие отображения дифференцируемы по Фреше на своих областях определения и найдите их производные:

(a) $f\colon M_n \to M_n$, $f(A) = A^k$, где M_n — пространство матриц $n \times n$;

(b) $f\colon M_n \to M_n$, $f(A) = A^{-1}$;

(c) $f\colon M_n \to M_n$, $f(A) = e^A$;

(d) $f\colon M_n \to \mathbb{R}$, $f(A) = \det A$.

Задача 2. (a) Приведите пример функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, которая дифференцируема в нуле по Гато, но не по Фреше.

(b) Приведите пример такой функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, что для всякого h существует $\partial_h f(0)$, но функция f не дифференцируема по Гато в $x = 0$.

Задача 3. (a) Пусть кривая $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $t \in [0,1]$, задана непрерывно дифференцируемыми функциями $x_k(t)$ Предположим, что в каждой точке кривой вектор скорости $\dot\gamma$ перпендикулярен градиенту функции f. Докажите, что f постоянна на γ.

(b) Опишите все дифференцируемые функции $f(x,y)$, удовлетворяющие уравнению $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, где a, b — фиксированные числа.

Задача 4. (a) Исследуйте на экстремум функцию $f(x,y) = ax^2+2bxy+cy^2$. (b) Найдите критические точки (где $\operatorname{grad} f = 0$) функции $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$ и классифицируйте их.

Задача 5. (Метод градиентного спуска) Пусть функция f на $\mathbb{R}^n$ дважды непрерывно дифференцируема и $m|h|^2 \le D^2f(h,h) \le M|h|^2$, где $m, M > 0$ — постоянные. Пусть $x_{n+1} = x_n - \gamma \cdot \operatorname{grad} f(x_n)$, где $0 < \gamma < 2/M$, $x_0 =$. Докажите, что последовательность точек x_n сходится к точке минимума функции f. Проиллюстрируйте этот метод на примере функции $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Задача 6. Для $z \in \mathbb{C}$ пусть $f(z) = \exp(-z^{-4})$ при $z \ne 0$ и $f(0) = 0$. Доказать, что f как функция на $\mathbb{R}^2$ имеет все частные производные $\partial_x^n \partial_y^k f$ на всей плоскости, но в нуле разрывна, поэтому не дифференцируема.

Задача 7*. Пусть функция f на $\mathbb{R}^2$ имеет всюду частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$. Доказать, что в некоторой точке она дифференцируема по Фреше.

Будем говорит, что функция f на $\mathbb{R}^n$ выпукла, если

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \quad \text{для всех } x, y \text{ и всех } \alpha \in [0,1].$$

Задача 8. (a) Пусть f — дифференцируемая функция. Докажите, что выпуклость функции f равносильна неравенству

$$\langle \operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(y), x - y \rangle \ge 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Пусть f — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Докажите, что выпуклость функции f равносильна неравенству $D^2 f(h,h) \ge 0$.

Задача 9. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Докажите, что из дифференцируемости функции f по Гато в точке a следует ее дифференцируемость по Фреше в этой точке.

Задача 10. Приведите пример функции f двух переменных, для которой

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \ne \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$