НМУ, I курс, 09.04.2022

Листок 3.

Задача 1. Пусть S — некоторый класс подмножеств множества X, включающий X, A_1 — класс множеств, полученный добавлением к множествам из набора S их дополнений. Через A_2 обозначим класс всех конечных пересечений множеств из A_1. Докажите, что класс A_3, состоящий из всех конечных объединений множеств из A_2, является наименьшей алгеброй, содержащей S.

Задача 2. Пусть $\mathcal{A}$ — σ-алгебра и дано множество $S \notin \mathcal{A}$. Докажите, что σ-алгебра, порожденная $\mathcal{A}$ и множеством S имеет вид

$$\Big\{(A \cap S) \cup (B \cap (X \setminus S)) \colon A, B \in \mathcal{A}\Big\}.$$

Задача 3. Докажите, что всякое множество A из σ-алгебры, порожденной классом множеств S принадлежит σ-алгебре, порожденной некоторым счетным набором множеств из S.

Задача 4. На алгебре, состоящей из конечных объединений попарно непересекающихся полуинтервалов $[a, b)$ в $\mathbb{R}$, задана мера μ формулой $\mu([a, b)) = F(b) - F(a)$, где F — монотонная ограниченная и непрерывная слева функция на $\mathbb{R}$. Докажите, что существует компактный класс, приближающий меру μ.

Задача 5. Пусть дана последовательность функций f_n со значениями в отрезке, измеримых относительно некоторой σ-алгебры. Докажите, что функции $\sup_n f_n(x)$ и $\inf_n f_n(x)$ тоже измеримы. Приведите пример, что для несчетного набора функций это утверждение неверно.

Задача 6. Пусть функция $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ непрерывна по первой переменной и является борелевской по второй. Докажите, что f измерима по Борелю.

Задача 7. Пусть функция f измерима относительно σ-алгебры, порожденной функцией g на множестве X. Докажите, что $f = F(g)$ для некоторой борелевской функции F на прямой.

Задача 8. (a) Докажите, что всякое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде не более чем счетного объединения дизъюнктных открытых шаров и множества лебеговской меры нуль.

(b) Пусть μ — вероятностная борелевская мера на единичном кубе в $\mathbb{R}^3$, причем что для всяких двух множеств B_1 и B_2, отличающихся сдвигом, верно равенство $\mu(B_1) = \mu(B_2)$. Докажите, что μ — мера Лебега.

Задача 9. Докажите, что в отрезке $[0, 1]$ есть такое борелевское множество B, что всякий интервал в $[0, 1]$ пересекается с ним и его дополнением по множеству положительной меры Лебега.

Задача 10. Пусть A — множество положительной меры Лебега на прямой. Докажите, что множество $A - A$ содержит интервал.