Грубая геометрия

Алексеев А.В. Арутюнов А.А.

Задачи к экзамену

1. Докажите, что граф Кэли конечнопорожденной группы G квазиизометричен прямой если и только если в G есть циклическая подгруппа конечного индекса.

2. Отображение метрических пространств $f: X \to Y$ называют крупномасштабным Липшицевым если есть положительные константы A, c такие, что
$$\rho(f(x), f(y)) \leq c\rho(x, y) + A.$$
Докажите, что такое f будет борнологическим. Приведите пример когда обратное – не верно. Докажите, что в геодезическом пространстве борнологичность и крупномасштабная липшецевость – эквивалентны.

3. Докажите, что любая дискретная грубая структура на счетном множестве – метризуема.

4. Докажите, что конечнопорожденная нильпотентная группа имеет полиномиальный рост. Найдите тип роста для группы Гейзенберга.

5. Докажите, что свободная группа (кроме $\mathbb{Z}$) не аменабельна.

6. Покажите, что если G – аменабельная группа, то любая подгруппа $H \subset G$ аменабельна, а также любая факторгруппа G/N аменабельна.

7. Докажите, что плоскость Лобачевского не аменабельна, используя результат предыдущей задачи и тот факт, что на плоскости Лобачевского действуют Фуксовы группы изометрично и кокомпактно.

8. Пусть (X, d) – метрическое пространство и пусть $\mathcal{E}$ – набор подмножеств $E \subseteq X \times X$ такой, что функция расстояния d, ограниченная на E, стремится к нулю на бесконечности; Другими словами, E – контролируемое множество, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subset X$ такой, что $d(x, x') < \varepsilon$ когда $(x, x') \in E \backslash K \times K$. Тогда $\mathcal{E}$ называется C_0 грубой структурой, ассоциированной с метрикой d.

   Проверьте, что $\mathcal{E}$ действительно является грубой структурой на (X, d), а также покажите, что C_0 грубая структура всегда является собственной.

9. Пусть X – топологическое пространство, и пусть $\mathcal{E}$ – набор всех собственных (в топологической смысле) подмножеств $X \times X$. Тогда $\mathcal{E}$ называется непрерывной грубой структурой на X.

Покажите, что непрерывная грубая структура всегда является собственной. Также покажите, что непрерывная грубая структура является топологической грубой структурой, ассоциированной с одноточечной компактификацией.

10. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ - множество точек $1, 1/2, 1/3, \ldots$ и 0. Пусть $C(X, M_2)$ - множество всех непрерывных функций на X со значениями в матричной алгебре M_2. Положим $B_1 = \{f \in C(X, M_2) : f(0) \text{ диагональна}\}$, $B_2 = \left\{f \in C(X, M_2) : f(0) \text{имеет вид} \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

    Показать, что $C(X, M_2), B_1, B_2 - C^*$-алгебры.

    Найти все (двухсторонние, замкнутые) идеалы в $C(X), C(X, M_2), B_1, B_2$.

11. Пусть X – геодезическое метрическое пространство. Покажите, что следующие условия эквивалентны:

    (1) X – CAT(k) пространство.

    (2) Для любого геодезического треугольника $\Delta([p,q],[q,r],[r,p])$ в X (периметром меньше, чем $2\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, если $k > 0$), точка $m \in [q,r]$ с $d(q,m) = d(r,m)$ и соответствующая сравнительная точка (comparison point) $\bar{m} \in [\bar{q},\bar{r}] \subset \bar{\Delta}(p,q,r) \subset M_\kappa^2$ удовлетворяет неравенству:

    $$d(p,m) \leqslant d(\bar{p},\bar{m}).$$

    Если $k = 0$, то (1) и (2) эквивалентны

    (3) Для всех $p, q, r \in X$ и всех $m \in X$ с $d(q,m) = d(r,m) = d(q,r)/2$, верно неравенство

    $$d(p,q)^2 + d(p,r)^2 \geq 2d(m,p)^2 + \frac{1}{2}d(q,r)^2$$

    (К примеру, для $\mathbb{E}^2$ неравенство легко получается из скалярного произведения.)

12. Пусть X – замкнутое подмножество $\mathbb{E}^3$, являющееся дополнением подпространства $\{(x,y,z) \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$. Покажите, что X, наделенное индуцированной метрикой, не является CAT(k) пространством для любого k.

13. Вычислите $HX^*(\mathbb{Z}^n)$.

14. Приведите пример грубого отображения у которого есть слабая грубая неподвижная точка, но нет сильной.