Листок 1. 9 февраля 2022

Задача 1. Нарисовать на плоскости множества а) $arg(1-z)=\frac{3}{4}\pi$; б) $\bar{z}=iz^2$; в) $\bar{z}=iz$; г) $|\frac{z-2i}{z+4}|\geq 1$; д) $\operatorname{Re} z^2>1$; е) $|z-2i+5|=1$; ж) $\operatorname{Re} z^2>1$; з) $\operatorname{Im} z^2>1$.

Задача 2. Нарисовать на плоскости множества и их образы при отображениях:
а) $\{z|\frac{\pi}{4}<\arg z\leqslant\pi, |z|\leqslant\frac{1}{2}\}$, $\{z|\operatorname{Re} z=1\}$, $z\mapsto z^2$;
б) $\{z|\operatorname{Im} z=1\}$, $\{z|\frac{\pi}{4}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z<1\}$, $z\mapsto\frac{1}{z}$;
в) $\{z|\arg z=\frac{\pi}{4}\}$, $\{z|0\leqslant\arg z\leqslant\pi, |z|<1\}$, $z\mapsto z+\frac{1}{z}$.

Задача 3. Нарисовать на плоскости множества и их образы при отображениях:
а) $\{z|0<\operatorname{Im} z<2\pi\}$, $\{z|-\frac{\pi}{4}<\operatorname{Im} z\leq\frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z<1\}$, $z\mapsto e^z$;
б) $\{z|\operatorname{Im} z=\frac{\pi}{6}\}$, $\{z|\operatorname{Re} z=\frac{\pi}{6}\}$, $z\mapsto\sin z$.

Задача 4. В какие множества переводит отображение $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$ прямые и окружности?

Задача 5. Опишите все дробно-линейные отображения, переводящие открытый единичный круг, полуплоскость в себя?

Задача 6. В каких точках непрерывны (дифференцируемы) функции $\operatorname{Re} z$, $\bar{z}$, $|z^2|$, $arg(z)$.

Задача 7. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, коэффициенты которого определены рекуррентным соотношением: $a_{n+2}=aa_{n+1}+ba_n$ $(a,b\in\mathbb{R})$, $a_0=0$, $a_1=1$.
а) Докажите, что его радиус сходимости отличен от нуля.
б) Найдите сумму этого ряда.

Задача 8. Разложите функцию $\frac{1}{1+ix}$ в степенной ряд с центром в точке $a\in\mathbb{R}$. Найдите радиус сходимости этого ряда.

Задача 9. Докажите, что $e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+...$

Задача 10. Докажите, что $|e^z-1|\leq e^{|z|}-1\leq|z|e^{|z|}$ при любом z.