Задачи по курсу “Введение в бирациональную геометрию”

(i) Лемма об отрицательности стягиваний. Рассмотрим бирациональное стягивание проективных многообразий $f\colon X \to Y$. Предположим, что на X выполнена численная эквивалентность дивизоров

$$\sum \alpha_i E_i \equiv N + G, \qquad \alpha_i \in \mathbb{Q},$$

где E_i являются f-исключительными дивизорами, $\mathbb{Q}$-дивизор N является f-nef (то есть имеем $N \cdot C \geq 0$ для любой эффективной кривой C, стягиваемой морфизмом f), а G – $\mathbb{Q}$-дивизор, ни одна из компонент которого не является f-исключительной. Покажите, что тогда $\alpha_i \leq 0$ для любого i. *Указание: свести к случаю поверхностей.*

(ii) Рассмотрим гиперповерхность X в $\mathbb{C}^4$, заданную уравнением $xy = z^2t^2$. Покажите, что раздутие начала координат приводит к многообразию $\widetilde{X}$, особенности которого “аналогичны” особенностям исходного, то есть в некоторой аффинной карте $\widetilde{X}$ изоморфно исходному многообразию.

(iii) Пусть $X \ni o$ – особенность, заданная уравнением

$$(x^2 + y^3 + yg_3(z,t) + h_5(z,t) = 0) \subset \mathbb{C}^4,$$

где g_3 и h_5 не имеют общих множителей (говорят, что такая особенность имеет тип $cE7$). Покажите, что X имеет изолированную особую точку в начале координат, и ее взвешенное раздутие с весами $(3,2,1,1)$ имеет терминальные особенности. Выведите отсюда, что само X имеет терминальные особенности.

(iv) Пусть X – неособое трехмерное многообразие и пусть $C \subset X$ – кривая, являющаяся локально полным пересечением. При каких условиях раздутие C имеет терминальные особенности?

1. Многообразия Фано

(i) Пусть X – раздутие гладкой трехмерной квадрики $Q \subset \mathbb{P}^4$ в прямой $L \simeq \mathbb{P}^1 \subset Q$. Докажите, что X является многообразием Фано, найдите его степень $(-K_X)^3$, опишите конус Мори и экстремальные стягивание.

(ii) То же, что и в прошлой задаче, для многообразия X, где X – раздутие гладкой трехмерной квадрики $Q \subset \mathbb{P}^4$ в гладкой конике $C \subset Q$.

(iii) То же, что и в прошлой задаче, для многообразия X, где X – двойное накрытие $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$, разветвленное в гладком дивизоре бистепени $(2, 2)$.

(iv) При каких значениях a и b, где $0 \le a \le b$, многообразие

$$X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(a) \oplus \mathscr{O}(b)),$$

является многообразием Фано? Слабым многообразием Фано (то есть, $-K_X$ nef и big)? Найдите его степень $(-K_X)^3$ и опишите экстремальные стягивания.

(v) Тот же вопрос, что и выше, для $a \ge 0$ и многообразия

$$X = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(a)).$$

(vi) Тот же вопрос, что и выше, для $n, a \ge 0$, $b \in \mathbb{Z}$ и многообразия

$$X = \mathbb{P}_{\mathbb{F}^n}(\mathscr{O} \oplus \mathscr{O}(as + bf)),$$

где s и f являются, соответственно, $(-n)$-сечением и слоем на поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_n$.

(vii) В обозначениях предыдущих трех задач, выясните, при каких значениях параметров a, b, n можно подобрать границу Δ такую, что пара (X, Δ) будет лог-канонической лог Фано парой.

(viii) Рассмотрим взвешенное проективное пространство $X = \mathbb{P}(a, b, c, d)$ для $1 \le a \le b \le c \le d$. Опишите, при каких значениях a, b, c, d многообразие X имеет канонические (соотв., $1/2$-лог-канонические) особенности.

(ix) Найдите все поверхности дель Пеццо, являющиеся полными пересечениями гиперповерхностей в грассманианах.

(x) Когда раздутие $m \ge 2$ точек на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ является многообразием Фано?

2. Расслоения на поверхности дель Пеццо

(i) Приведите пример (терминального) расслоения $\pi\colon X \to C \ni o$ над ростком кривой такого, что общий слой π является гладкой кубической поверхностью дель Пеццо, а специальный слой является нерациональной поверхностью.

(ii) То же самое для расслоения на поверхностей дель Пеццо степени 4.

(iii) Постройте пример (терминального) расслоения $\pi\colon X \to C \ni o$ на поверхности дель Пеццо такого, что специальный слой бирационально расслоен над кривой рода $g > 1$.

(iv) Постройте пример (лог-терминального) расслоения $\pi\colon X \to C \ni o$ на поверхности дель Пеццо такого, что специальный слой бирационально расслоен над кривой сколь угодно большого рода $g \gg 0$.

3. Расслоения на коники

(i) Пусть $X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ – гладкий дивизор бистепени $(2, d)$, где $d \geq 1$. Докажите, что проекция $X \to \mathbb{P}^2$ на второй сомножитель является расслоением на коники. Вычислите степень дискриминантной кривой $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ (то есть кривой, слои над точками которой являются вырожденными кониками).

(ii) Пусть X – раздутие гладкой кубики $Y \subset \mathbb{P}^4$ в прямой $l \subset Y$. Покажите, что X допускает структуру расслоения на коники $X \to \mathbb{P}^2$ и найдите степень дискриминантной кривой $\Delta \subset \mathbb{P}^2$.

(iii) Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ – гладкая кривая степени 7 и рода 5. Пусть X – раздутие этой кривой. Покажите, что линейная система $|3H - E|$, где H – прообраз плоскости на $\mathbb{P}^3$, а E – исключительный дивизор раздутия, задает морфизм на $\mathbb{P}^2$, являющийся расслоением на коники. Вычислите степень дискриминантной кривой $\Delta \subset \mathbb{P}^2$. Является ли X бирационально изоморфным многообразию из предыдущей задачи?

(iv) Пусть X – гладкое трехмерное многообразие Фано, и пусть $f\colon X \to Y$ – плоский морфизм на гладкую поверхность. Докажите, что Y – поверхность дель Пеццо. *Указание: покажите, что* $-f_*(K_X^2) \equiv 4K_Y + \Delta$, *где* $\Delta \subset Y$ *– дискриминантный дивизор.*