ЗАДАЧИ ДЛЯ ДОМАШНЕГО ЭКЗАМЕНА ПО КРУСУ

Теория минимальных подмногообразий-II

Для получения оценки "отлично"достаточно решить **любые 5 задач** *из этого списка. Решения следует направлять на электронный адрес: wowa-medved@mail.ru* **до 28 мая 23:59. После этого задачи не принимаются!**

1. Докажите, что единственной вложенной полной минимальной поверхностью в $\mathbb{E}^3$ с одним концом является плоскость.

Указание: используйте принцип максимума.

2. Пусть Σ – вложенная полная минимальная поверхность в $\mathbb{E}^3$. Пусть ν – поле единичных нормалей. Зафиксируем постоянное поле v на $\mathbb{E}^3$. Рассмотрим гладкую функцию на Σ $f_v = \nu \cdot v$. Докажите, что поле $f_v \nu$ является *полем Якоби*, т.е. функция f_v удовлетворяет уравнению Якоби $L_g f_v = 0$.

3. Пусть $\Sigma \subset \mathbb{E}^3$ – полная минимальная поверхность, отличная от плоскости, и g – индуцированная метрика на ней. Рассмотрим гауссово отображение $G\colon \Sigma \to (S^2, g_0)$. Докажите, что

$$(a)\ G^* g_0 = -K_g g; \quad (b)\ \Delta_{G^* g_0} = -\frac{1}{K_g}\Delta_g.$$

Здесь K_g – гауссова кривизна (Σ, g).

4. Приведите пример голоморфной кривой в $\mathbb{E}^4$ со стандартной комплексной структурой, имеющую бесконечную полную гауссову кривизну.

5. Пусть $\varphi\colon \Sigma \to \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{E}^4$ – минимальное погружение поверхности Σ, а $\varphi^*\colon \Sigma \to \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{E}^4$ – его гауссово отображение. Докажите, что биполярная поверхность заданная погружением $\varphi \wedge \varphi^*\colon \Sigma \to \mathbb{S}^5 \subset \mathbb{E}^6$ также является минимальной.

6. (a) Постройте минимальное вложение

$$\mathbb{S}^n\left(\sqrt{\frac{n}{n+n'}}\right) \times \mathbb{S}^{n'}\left(\sqrt{\frac{n'}{n+n'}}\right) \to \mathbb{S}^{n+n'+1}$$

Образ этого вложения называется *гиперповерхностью Клиффорда*. Здесь $\mathbb{S}^n(R)$ обозначает круглую сферу радиуса R.

(б) Обобщите предыдущий результат следующим образом: пусть $n = n_1 + \ldots + n_k$. Тогда существует минимальное погружение

$$\mathbb{S}^{n_1}\left(\sqrt{\frac{n_1}{n}}\right) \times \ldots \times \mathbb{S}^{n_k}\left(\sqrt{\frac{n_k}{n}}\right) \to \mathbb{S}^{n+k-1}.$$

Указание: Пусть $\varphi\colon M \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ и $\varphi\colon M' \to \mathbb{S}^{n'} \subset \mathbb{E}^{n'+1}$ – два минимальных погружения. Постройте погружение $c\varphi \oplus c'\varphi'\colon M \times M' \to \mathbb{E}^{n+n'+2}$, где c, c' – некоторые вещественные константы. Выберете их так, чтобы образ погружения $c\varphi \oplus c'\varphi'$ лежал в единичной гиперсфере $\mathbb{S}^{n+n'+1}$. Используйте теорему Такахаши.

7. Рассмотрим контур Γ состоящий из пары окружностей радиуса r, расположенных в параллельных плоскостях на расстоянии h друг от друга. Если h не велико, то существует два различных решения задачи Плато для контура Γ: два круга, затягивающих эти окружности и катеноид. Рассмотрим катеноид, натянутый на Γ. Обозначим за x радиус его горловины, т.е. самого узкого места. Выясните, при каких x катеноид может натягиваться на контур Γ, т.е. это решение существует. При каких значениях h происходит перестройка минимальной поверхности, т.е. катеноид уже не может существовать и превращается в пару кругов, затягивающих Γ. Найдите зависимость расстояния h между плоскостями, в которых лежат окружности, от радиуса горловины катеноида x, затягивающего данный контур. При каком значении x функция h достигает своего максимума?

8. Докажите, что часть геликоида, заключенная в прямом цилиндре вращения, является минимальной поверхностью со свободной границей в этом цилиндре с внутренностью.

9. Пусть M – минимальное подмногообразие со свободной границей в $\mathbb{B}^n$. Может ли быть так, что ∂M целиком находится в полусфере?

10. (а) Пусть Σ – минимальная поверхность со свободной границей в $\mathbb{B}^3$. Докажите, что $\partial\Sigma$ – линия главной кривизны на Σ, т.е. касательная к $\partial\Sigma$ в любой точке совпадает с главным направлением на Σ.

(б) Пусть M – минимальная гиперповерхность со свободной границей в $\mathbb{B}^n$. Докажите, что ∂M омбилично в M, т.е. вдоль ∂M метрика пропорциональна второй квадратичной форме (со значением в числах).

11. (а) Докажите, что индекс экваториального круга в $\mathbb{B}^3$ равен 1. Для этого сначала покажите, что индекс экваториального круга хотя бы 1. Затем покажите, что индекс не более 1, используя факт, что плоский экваториальный круг имеет наименьшую площадь среди всех поверхностей, разбивающих $\mathbb{B}^3$ на две равновеликие части.

(б) Докажите, что индекс экваториального круга в $\mathbb{B}^n$ равен $n-2$.

Указание: Заметьте, что оператор Якоби расщепляется на скалярные операторы.