Листок 2
ТЕОРИЯ МИНИМАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ II
МИНИМАЛЬНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В СФЕРАХ

1. (а) Постройте минимальное вложение

$$\mathbb{S}^n\left(\sqrt{\frac{n}{n+n'}}\right)\times\mathbb{S}^{n'}\left(\sqrt{\frac{n'}{n+n'}}\right)\to\mathbb{S}^{n+n'+1}$$

Образ этого вложения называется *гиперповерхностью Клиффорда*. Здесь $\mathbb{S}^n(R)$ обозначает круглую сферу радиуса R.

(б) Обобщите предыдущий результат следующим образом: пусть $n = n_1 + \ldots + n_k$. Тогда существует минимальное погружение

$$\mathbb{S}^{n_1}\left(\sqrt{\frac{n_1}{n}}\right)\times\ldots\times\mathbb{S}^{n_k}\left(\sqrt{\frac{n_k}{n}}\right)\to\mathbb{S}^{n+k-1}.$$

Указание: Пусть $\varphi\colon M\to\mathbb{S}^n\subset\mathbb{E}^{n+1}$ и $\varphi\colon M'\to\mathbb{S}^{n'}\subset\mathbb{E}^{n'+1}$ – два минимальных погружения. Постройте погружение $c\varphi\oplus c'\varphi'\colon M\times M'\to\mathbb{E}^{n+n'+2}$, где c, c' – некоторые вещественные константы. Выберете их так, чтобы образ погружения $c\varphi\oplus c'\varphi'$ лежал в единичной гиперсфере $\mathbb{S}^{n+n'+1}$. Используйте теорему Такахаши.

2. Пусть

$$u_0=\frac{1}{\sqrt{3}}xy,\quad u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}xz,\quad u_2=\frac{1}{\sqrt{3}}yz,$$
$$u_3=\frac{1}{2\sqrt{3}}(x^2-y^2),\quad u_4=\frac{1}{6}(x^2+y^2-2z^2).$$

Докажите, что отображение $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})\to\mathbb{S}^4$ заданное как

$$(x,y,z)\mapsto(u_0,u_1,u_2,u_3,u_4),\ x^2+y^2+z^2=3$$

является минимальным погружением. Оно называется *вложением Веронезе*. Покажите, что оно задаёт вложение $\mathbb{RP}^2$ с метрикой кривизны $\frac{1}{3}$ в $\mathbb{S}^4$.

3. Векторное пространство $\mathrm{Sym}_0(n+1)$ симметрических вещественных матриц $(n+1)\times(n+1)$ с нулевым следом имеет размерность $\frac{1}{3}n(n+3)$. Введём на нём норму $||(a_{ij})||^2=\sum a_{ij}^2$. Пусть $\mathbb{S}^{n+p}$, где $p=\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ – единичная гиперсфера в $\mathrm{Sym}_0(n+1)$. Докажите, что отображение $\mathbb{S}^n\left(\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}\right)$ в $\mathbb{S}^{n+p}$ заданное как

$$a_{ij}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\left(x_ix_j-\frac{2}{n}\delta_{ij}\right)$$

является минимальным погружением.

4. Докажите, что функции $\cos\theta$ и $\sin\theta$ имеют каждая ровно по $2p$ нуля на геодезической $\pi(O_{p/q})$.

5. Пусть $\varphi\colon\Sigma\to\mathbb{S}^3\subset\mathbb{E}^4$ – минимальное погружение поверхности Σ, а $\varphi^*\colon\Sigma\to\mathbb{S}^3\subset\mathbb{E}^4$ – его гауссово отображение. Докажите, что биполярная поверхность заданная погружением $\varphi\wedge\varphi^*\colon\Sigma\to\mathbb{S}^5\subset\mathbb{E}^6$ также является минимальной.